Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 6

УДК 517.948.34:533.951.7

МАТЕМАТИКА

А. А. АРСЕНЬЕВ

О СУЩЕСТВОВАНИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВЛАСОВА

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 10 X 1974)

1. Пусть x, p — точки трехмерного эвклидова пространства. В стандартных обозначениях система уравнений Власова, описывающая эволюцию плотности разреженной плазмы в самосогласованном поле, записывается так:

$$\frac{\partial F^\pm}{\partial t}+\frac{1}{m_\pm}\left\langle p,\frac{\partial F^\pm}{\partial x}\right\rangle\mp e\left\langle\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{1}{m_\pm c}[p,H(x)],\frac{\partial F^\pm}{\partial p}\right\rangle=0,$$

$$-\Delta\varphi=4\pi e\int(F^+-F^-)\,dp, \tag{1}$$

$$F^\pm(x,\ p,\ +0)=F_0{}^\pm(x,\ p).$$

Обозначим символом f вектор с компонентами $f=(F^+,\ F^-)$. Разрешив систему (1) относительно φ, перепишем ее в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t}=A(f),\qquad f|_{t=0}=f_0, \tag{1$'$}$$

где оператор $A(f)$ однозначно определен системой (1).

Понятие статистического решения эволюционных уравнений было введено Ч. Фояшем [1]. Это понятие успешно применялось для построения математической теории турбулентности вязкой жидкости, основанной на уравнениях Навье — Стокса. Главный результат данной работы состоит в доказательстве теоремы существования статистических решений у системы (1).

Прямое перенесение методов работ [1] на случай системы (1) не проходит, и в доказательстве используются существенно иные построения.

2. Положим

$$F_\varepsilon{}^\pm(x,p)=(4\pi\varepsilon)^{-1}\int\exp(-(x-x')^2/(4\varepsilon))F^\pm(x',p)\,dx',$$

$$E(f)=\lim_{\varepsilon\to+0}\int|x-x'|^{-1}[F_\varepsilon{}^+(x,p)-F_\varepsilon{}^-(x,p)]\times$$
$$\times[F_\varepsilon{}^+(x',p')-F_\varepsilon{}^-(x',p')]\,dx\,dp\,dx'\,dp'.$$

Пусть D' — линейное пространство $L^1\cap L^\infty$, наделенное топологией, коиндуцированной вложением $D'\to(L^2$ со слабой топологией), и D — линейное топологическое пространство вектор-функции f, рассматриваемое как произведение двух пространств D'.

Лемма 1. *Подмножества вида*

$$\{f=(F^+,\ F^-):\ \operatorname{vrai\,inf}F^\pm\geqslant0,\quad \operatorname{vrai\,sup}F^\pm\leqslant C_1{}^\pm,$$

$$\int F^\pm\,dx\,dp\leqslant C_2{}^\pm,\ \ \int p^2F^\pm\,dx\,dp\leqslant C_3{}^\pm,\ \ \int(1+x^2)^{\alpha/2}F^\pm\,dx\,dp\leqslant C_4{}^\pm,\ E(f)\leqslant C_5{}^\pm\Big\}$$

компактны в D.

Описанные в лемме 1 компакты мы будем называть допустимыми.

4. Пусть $\mathscr{F}$ — множество функционалов (не обязательно линейных) над D, удовлетворяющее условию:

$$\forall\Phi\in\mathscr{F},\ \forall f\in D\colon\ \exists\delta\Phi(f)(h)=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-1}\Phi(f+\varepsilon h)-\Phi(f)),$$

причем для фиксированного $f\in D$ оператор $\delta\Phi(f)$ есть интегральный оператор с гладким финитным ядром.

Легко видеть, что если $\Phi\in\mathscr{F}$, то для системы (1) оператор $\delta\Phi(f)\times\times(A(h))$, первоначально определенный лишь для h из области определения оператора A, допускает расширение по непрерывности на все D; ниже под $\delta\Phi(f)(A(h))$ мы будем подразумевать именно это расширение.

4. Теорема 1. *Пусть $H(x)\in L^1\cap L^\infty$, D_0 — допустимый компакт в D, $t\in(0,T)$, $\mu_0(\omega)$ — неотрицательная мера Радона на D_0.*

Тогда для любого $T<\infty$ найдется такой допустимый компакт $D_T\supset D_0$ и такое широко ((2), стр. 268) непрерывное отображение $t\to\mu_t(\omega)$ отрезка $[0,T]$ в пространство мер Радона на D_T, что для всех функционалов из $\mathscr{F}$ выполнено равенство

$$\int\Phi(f)\,d\mu_t-\int\Phi(f)\,d\mu_0=\int_0^t\left(\int\delta\Phi(f)(A(f))\,d\mu_\tau\right)d\tau. \qquad (2)$$

Семейство мер $\mu_t(\omega)$, удовлетворяющее уравнению (2), и называется статистическим решением системы (1).

Доказательство теоремы 1 основано на рассмотрении введенной в [3] сглаженной системы (в [3] рассмотрен случай $H(x)\equiv 0$, однако обобщение на случай $H(x)\neq 0$ тривиально) и доказательстве того факта, что решение сглаженной системы единственно, непрерывно зависит от начальных данных и отображает компакт D_0 в некоторый не зависящий от n компакт D_T.

5. Отметим, что понятие статистического решения отнюдь не сводится к рассмотрению мер вида $\mu_t(\omega)=\mu_0(S_t^{-1}(\omega\cap S_tD))$, где $\mu_0(\omega)$ — мера на множестве начальных данных, S_t — оператор эволюции системы (1). Дело в том, что в наиболее интересных случаях решения уравнения (1) рассматриваются в настолько «плохих» пространствах, что заведомо отсутствует единственность решения и нет непрерывной зависимости от начальных данных, а в такой ситуации далеко не тривиален факт существования оператора S_t, отображающего измеримые множества в измеримые.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
30 IX 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *C. Foias*, Rend. Sem. Matem. Univ. Padova, v. 48 (1972), v. 49 (1973). [2] *Н. Бурбаки*, Интегрирование. Меры, интегрирование мер, «Наука», 1967. [3] *А. А. Арсеньев*, ДАН, т. 213, № 4 (1973).