

В. А. БАБЕШКО

**О СИСТЕМАХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ДИНАМИЧЕСКИХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ**

(Представлено академиком Ю. Н. Работновым 13 IX 1974)

Ряд плоских и осесимметричных контактных задач о вибрации штампов, жестко сцепленных со слоем или слонстой средой, приводятся к одной из систем интегральных уравнений вида

$$\sum_{n=1}^2 r_{mn} q_n = f_m(x), \quad x \in \Omega, \quad m=1, 2; \quad (1)$$

$$r_{mn} q_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \int_{\sigma} R_{mn}(u) e^{iu(\xi-x)} du q_n(\xi) d\xi; \quad (2)$$

$$r_{mn} q_n = \int_0^{\sigma_1} \int_{\sigma_1} R_{mn}(u) J_{1-[m/2]}(ux) J_{1-[n/2]}(u\xi) u \xi q_n(\xi) du d\xi. \quad (3)$$

Элементы матрицы R_{mn} связаны с элементами вещественной матрицы K_{mn} соотношениями

$$R_{mn} \equiv K_{mn}, \quad R_{12} \equiv -R_{21} \equiv iK_{12}; \quad (4)$$

функции $K_{mn}(u)$, $\operatorname{cthu} K_{12}(u)$ обладают всеми перечисленными в работе (1) свойствами функции $K(u)$ и здесь не повторяются. Расположение контуров σ, σ_1 в зависимости от каждого конкретного случая необходимо брать в соответствии с правилами, установленными в работах (1-3). Параметр a в плоском случае — безразмерная полуширина штампа, в осесимметричном — безразмерный радиус.

Будем считать, что изучается регулярный случай, причем все функции $K_{mn}(u)$ имеют на вещественной оси одни и те же $2p$ полюсов $\pm \xi_k$, $k=1, 2, \dots, p$, и при $u \rightarrow \pm \infty$ существует асимптотическое представление

$$K_{mn}(u) = C|u|^{-1} [1 + O(u^{-1})], \quad (5)$$

$$K_{12}(u) = Bu^{-1} [1 + O(u^{-1})], \quad C > |B|.$$

1°. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть функции $K_{mn}(u)$ обладают следующими свойствами:

- 1) $[K_{11}^{-1}(\xi_r)]' > 0$, $r=1, 2, \dots, p$;
- 2) $[K_{11}^{-1}(\xi_r)]' [K_{22}^{-1}(\xi_r)]' > \{[K_{12}^{-1}(\xi_r)]'\}^2$;

3) существуют рациональные ограниченные на бесконечности функции $\Pi_{mn}(u)$ с полюсами в точках $\pm \xi_k$, $k=1, 2, \dots, p$, такие, что на вещественной оси имеют место неравенства

$$K_{11}(u) P_{11}(u) + iK_{12}(u) P_{12}(u) \geq 0,$$

$$[K_{11}(u) K_{22}(u) - K_{12}^2(u)] [P_{11}(u) P_{22}(u) - P_{12}(u) P_{21}(u)] \geq 0,$$

$$P_{mn}(u) = (-1)^{m+n} \Pi_{mn}(u) [\Pi_{11}(u) \Pi_{22}(u) - \Pi_{12}(u) \Pi_{21}(u)]^{-1}.$$

Тогда система (1), (2) не может иметь в L_α , $\alpha > 1$, более одного решения.

В случае системы (1), (3) все условия теоремы 1 остаются в силе, за исключением последнего, а именно добавляется требование четности и ограниченности функций $\Pi_m(u)$ и $u\Pi_n(u)$, $m \neq n$.

Доказательство теоремы 1 аналогично доказательству теоремы 1 в работе (4).

Будем считать, что матрицы-функции $\mathbf{K}(u)$ факторизованы, т. е. имеют место представления (4)

$$\mathbf{K}(u) = \mathbf{M}_-^{-1}(u)\mathbf{M}_+(u) \equiv \mathbf{N}_+^{-1}(u)\mathbf{N}_-(u); \quad (6)$$

здесь $\mathbf{M}_+(u)$, $\mathbf{N}_+^{-1}(u)$ — матрицы-функции с элементами регулярными, а определителями, отличными от нуля выше контура σ . В области регулярности каждый элемент указанных матриц имеет при больших u порядок $O(u^{-0,5})$. Матрицы $\mathbf{M}_-^{-1}(u)$, $\mathbf{N}_-(u)$ обладают этими свойствами ниже контура σ .

Теорема 2. В условиях теоремы 1 системы интегральных уравнений (1) — (3) эквивалентны системам уравнений Фредгольма второго рода: в случае (2)

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(u) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{M}_-(-\alpha) [\mathbf{N}_+^{-1}(\alpha) e^{-2a\alpha} \mathbf{Y}(\alpha) + e^{-a\alpha} \mathbf{F}(-\alpha)] d\alpha}{\alpha + u} \\ \mathbf{Y}(u) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{N}_+(\alpha) [\mathbf{M}_-^{-1}(\alpha) e^{-2a\alpha} \mathbf{X}(\alpha) + e^{-a\alpha} \mathbf{F}(\alpha)] d\alpha}{\alpha + u}; \end{aligned} \quad (7)$$

$\mathbf{X}(u)$, $\mathbf{Y}(u)$ — векторы с элементами, регулярными ниже контура Γ и убывающими там с весом u^γ , $\gamma < 1$; в случае (3)

$$\mathbf{Z}(u) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \frac{\mathbf{N}_+(\alpha) [C(\alpha, \beta) \mathbf{N}_+^{-1}(\beta) \mathbf{Z}(\beta) + \kappa_2(\alpha, a) \mathbf{F}(\alpha) 2\alpha] d\beta d\alpha}{(\alpha - u)(\alpha^2 - \beta^2)}, \quad (8)$$

$$u > \Gamma_1 > \Gamma_2.$$

Здесь приняты обозначения

$$\begin{aligned} C(\alpha, \beta) &= (\alpha + \beta) \mathbf{I} - \Theta(\alpha, \beta, a) \kappa_1(\beta, a) \kappa_2(\alpha, a) (\alpha^2 - \beta^2), \\ \Theta_n(\alpha, \beta, a) &= \frac{a\beta J_n(\alpha a) H_{n+1}^{(2)}(\beta a) - a\alpha J_{n+1}(\alpha a) H_n^{(2)}(\beta a)}{\alpha^2 - \beta^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Матрицы $\Theta(\alpha, \beta, a)$ и $\kappa_h(\alpha, a)$ диагональные. Диагональными элементами первой являются $\theta_1(\alpha, \beta, a)$ и $\theta_0(\alpha, \beta, a)$, а второй — $\kappa_h(\alpha, a, 0)$. Последние подбираются из условия их регулярности в нижней полуплоскости и следующих асимптотических свойств в этой области при $|\alpha| \rightarrow \infty$:

$$ia^{1/2} \kappa_1(\alpha, a, n) H_n^{(2)}(\alpha, a) \rightarrow 1, \quad a^{1/2} \kappa_2(\alpha, a, n) J_n(\alpha a) \rightarrow 1. \quad (10)$$

В соотношении (7) $\mathbf{F}(\alpha)$ — вектор, компонентами которого являются преобразования Фурье функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ на $[-a, a]$; в соотношении (8) $\mathbf{F}(\alpha)$ — вектор, первой и второй компонентами которого являются преобразования Бесселя функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ порядков 1 и 0 соответственно.

$\mathbf{Z}(\beta)$ — вектор-функция, регулярная в окрестности контура σ и убывающая на нем с весом β^γ , $\gamma < 1$ при $|\beta| \rightarrow \infty$. Контур Γ , Γ_1 , Γ_2 расположены в области регулярности вектор-функций \mathbf{X} , \mathbf{Y} , \mathbf{Z} .

Определив из систем уравнений (7), (8) векторы X , Y , Z , перейдем затем к вектору $Q(u)$ соответственно из соотношений

$$K(u)Q(u) = F(u) - M_-^{-1}(u)e^{-2aiu}X(u) - N_+^{-1}(u)e^{2aiu}Y(-u), \quad (11)$$

$$Q(u) = \{Q_1(u), Q_2(u)\};$$

$$K(u)Q(u) = F(u) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \Theta(u, \beta, a) N_+^{-1}(\beta) \kappa_1(\beta, a) Z(\beta) d\beta. \quad (12)$$

Знание векторов $Q(u)$, полученных из систем (11), (12), позволяет найти решения интегральных уравнений (1)–(3) соответственно по формулам

$$q_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q_k(u) e^{-iux} du, \quad q_k(r) = \int_0^{\infty} Q_k(u) u J_{1-[k/2]}(ur) du. \quad (13)$$

Система уравнений (7) Фредгольмова на контуре Γ в пространстве непрерывных с указанным весом функций. Система (8) несложным преобразованием приводится к Фредгольмовой на контуре Γ_2 . Для построения приближенных решений уравнений (7), (8) можно использовать примененную в работе (5) деформацию контуров; это особенно эффективно при применении приближенной факторизации.

Приводимая ниже теорема позволяет использовать приближенную аппроксимацию матриц для построения приближенных решений.

Теорема 3. Пусть матрицы K и K^* с элементами $K_{mn}(u)$ и $K_{mn}^*(u)$ обладают перечисленными выше свойствами, в том числе и (5). Пусть, кроме того, соответствующие элементы матриц удовлетворяют условиям теоремы 3 работы (5).

Тогда решения уравнения (1) и уравнения с ядром, описываемым матрицей K^* , также удовлетворяют условиям указанной теоремы.

2°. Условия, наложенные на матрицу $K(u)$ выше, обеспечивают в соответствии с общими теоремами, изложенными в (4), ее факторизацию в форме (6).

Однако построение в явном виде матриц M_{\pm} , N_{\pm} невозможно. Поэтому применим приближенную факторизацию, заменив факторизацию матрицы $K(u)$ факторизацией матрицы $K^*(u)$, удовлетворяющей условиям теоремы (3).

Для построения матрицы $K^*(u)$ введем в рассмотрение функционально-коммутативную матрицу $\Phi(u)$ с элементами $\varphi_{mn}(u)$ вида

$$\varphi_{11} = \varphi_{22} = K_{11}(u), \quad \varphi_{12} = -\varphi_{21} = iK_{12}(u). \quad (14)$$

Факторизация матрицы $\Phi(u)$ осуществляется с помощью функций от матриц в явном виде. В результате получается представление

$$\Phi(u) = \Phi_+(u) \Phi_-(u) = \Phi_-(u) \Phi_+(u), \quad (15)$$

$$2\varphi_{11}^{\pm}(u) = 2\varphi_{22}^{\pm}(u) = S_{\pm}(u) + T_{\pm}(u), \quad 2\varphi_{12}^{\pm}(u) = 2\varphi_{21}^{\pm}(u) = i[S_{\pm}(u) - T_{\pm}(u)];$$

$$S_+ S_- = K_{11} + K_{12}, \quad T_+ T_- = K_{11} - K_{12}. \quad (16)$$

Введем теперь в рассмотрение матрицу

$$H(u) = \Phi_-^{-1}(u) K(u) \Phi_+^{-1}(u). \quad (17)$$

Ее элементы $H_{mn}(u)$ имеют вид

$$H_{11} = 1 + 0,25\varphi_{12}^+ \varphi_{12}^- L(u), \quad H_{22} = 1 + 0,25\varphi_{11}^+ \varphi_{11}^- L(u),$$

$$H_{12} = -0,25i\varphi_{12}^- \varphi_{11}^+ L(u), \quad H_{21} = 0,25i\varphi_{11}^- \varphi_{12}^+ L(u),$$

$$L(u) = (K_{22} - K_{11}) [\det \Phi(u)].$$

Несложный анализ позволяет установить следующие асимптотические свойства элементов матрицы Φ^\pm и \mathbf{H} при $u \rightarrow \pm\infty$:

$$\begin{aligned}\sigma^{-1}\varphi_{11}^\pm &= (\mp iu)^{-\theta_\pm} + (\mp iu)^{-\theta_\mp} + O(u^{-1}), \\ \sigma^{-1}\varphi_{12}^\pm &= (\mp iu)^{-\theta_\pm} - (\mp iu)^{-\theta_\mp} + O(u^{-1}),\end{aligned}\tag{18}$$

$$\sigma = (C^2 - B^2)^{1/4}, \quad \theta_\pm = 0,5 \pm i\pi^{-1} \operatorname{arcth}(B/C),$$

$$H_{mn}(u) = 1 + O(u^{-1}), \quad H_{nn}(u) = O(u^{-1}), \quad m \neq n.$$

Представим теперь матрицу $\mathbf{H}(u)$ в форме

$$\mathbf{H}(u) = \mathbf{H}_1(u) + u\mathbf{H}_2(u);\tag{19}$$

элементы матриц $\mathbf{H}_1(u)$, $\mathbf{H}_2(u)$ четные и могут иметь конечное число на вещественной оси полюсов.

Аппроксимируем элементы матриц $\mathbf{H}_k(u)$ рациональными функциями с помощью полиномов С. Н. Бернштейна, как это было сделано в работе (3). Будем при этом требовать, чтобы разность модулей элементов матриц $\mathbf{H}_k(u)$ и аппроксимирующих, отнесенная к $|\det \mathbf{H}(u)|$ на вещественной оси, была мала. В результате матрица $\mathbf{H}(u)$ аппроксимируется матрицей $\mathbf{H}^*(u)$ с рациональными элементами. Последняя, как известно (6), факторизуется в явном виде, т. е. строится представление

$$\mathbf{H}^*(u) = \mathbf{H}_-^*(u)\mathbf{H}_+^*(u).\tag{20}$$

Принимая во внимание (17), находим

$$\mathbf{K}(u) \approx \mathbf{K}^*(u) = \Phi_-(u)\mathbf{H}_-^*(u)\mathbf{H}_+^*(u)\Phi_+(u).$$

Таким путем строится приближенная факторизация (6). Поменяв в соотношении (17) местами Φ_+ и Φ_- , этим же путем построим вторую приближенную факторизацию (6).

Отметим, что асимптотические свойства при $u \rightarrow \pm\infty$ у элементов матриц $\mathbf{K}(u)$, $\mathbf{K}^*(u)$ и $\Phi(u)$ одни и те же и описываются формулами (18).

Факторизацию (16) также можно произвести приближенно. Достаточно для этого воспользоваться представлением

$$\begin{aligned}h^\pm(u) &= [K_{11}(u) \pm K_{12}(u)](b-iu)^{\theta_\pm}(b+iu)^{\theta_\mp} \sigma^{-2} = \\ &= h_1^\pm(u) + uh_2^\pm(u) = 1 + O(u^{-2}),\end{aligned}$$

где функции $h_k^\pm(u)$ четные, которые с помощью приемов работы (3) аппроксимируются рациональными. Как и в работе (3), число b рекомендуется подбирать по возможности большим.

Автор благодарит чл.-корр. АН СССР И. И. Воронича за ценные советы.

Научно-исследовательский институт
механики и прикладной математики
Ростовского государственного университета

Поступило
18 VIII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. А. Бабешко, ДАН, т. 204, № 3 (1971). ² В. А. Бабешко, т. 210, № 6 (1973).
³ В. А. Бабешко, т. 213, № 3 (1973). ⁴ И. Ц. Голдберг, И. А. Фельдман, Уравнения в свертках и проекционные методы их решения, «Наука», 1971. ⁵ В. А. Бабешко, ДАН, т. 217, № 4 (1974). ⁶ Н. П. Веква, Системы сингулярных интегральных уравнений, «Наука», 1970.