СТАТЬИ

УДК 533.9

К нелинейной теории электронного циклотронного резонанса

А. Н. Кондратенко

В работе рассматривается влияние нелинейных эффектов на электронный циклотронный резонанс в плазме. Основное внимание при этом уделяется определению максимальной скорости, приобретаемой электронами плазмы в условиях циклотронного резонанса.

Рассмотрим плазменный волновод с радиусом a, находящийся в постоянном магнитном поле $\mathbf{H}_0$, направленном вдоль оси волновода (ось z). Вдоль поля движется аксиально-симметричная электромагнитная волна с частотой $\omega \approx \omega_e$. Соответствующая самосогласованная гидродинамическая система уравнений, описывающая поведение электронов плазмы в поле волны, имеет вид [1]*

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -\frac{e}{m}\mathbf{E} - \frac{e}{mc}[\mathbf{v},\ \mathbf{H}_0+\mathbf{H}] - $$

$$-\frac{1}{mn}\nabla p - \nu\mathbf{v} - \frac{1}{mn}\nabla\overleftrightarrow{\pi}; \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}; \tag{2}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} - \frac{4\pi e}{c}n\mathbf{v}; \tag{3}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n\mathbf{v} = 0, \tag{4}$$

где n — плотность; $p = nT$ — давление; T — температура; ν — эффективная частота соударений электронов плазмы с ионами. Если $\frac{\nu^2}{\omega_e^2} \ll 1$, то тензор вязкости π_{ik} имеет только диагональные компоненты [1]:

$$\pi_{rr} = \pi_{\varphi\varphi} = -\eta\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\cdot r v_r - \frac{1}{3}\operatorname{div}\mathbf{v}\right);$$

$$\pi_{zz} = -2\eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{1}{3}\operatorname{div}\mathbf{v}\right),$$

где $\eta = nT\tau$; $\tau = \frac{1}{\nu}$. Ионы, плотность которых равна n_0, будем считать находящимися в покое. Перейдем к безразмерным величинам $\left(E \to \frac{E}{H_0};\ H \to \frac{H}{H_0};\ \frac{n}{n_0} = 1+\sigma\right)$. Тогда в нерелятивистском случае ($v^2 \ll c^2$) уравнения (1)—(4) принимают вид

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \omega_e[\mathbf{v},\ \varkappa_0] + c\omega_e\mathbf{E} = -(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} - \omega_e[\mathbf{v},\ \mathbf{H}] -$$

$$-v_{\text{т}}^2\nabla\sigma - \nu\mathbf{v} - \frac{1}{mn}\nabla\overleftrightarrow{\pi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathbf{v}}{2}\frac{v^2}{c^2}; \tag{5}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \alpha c\mathbf{v} = -\alpha c\sigma\mathbf{v}; \tag{6}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} - \Delta\mathbf{E} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E} - \alpha\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = \alpha\frac{\partial}{\partial t}(\sigma\mathbf{v}); \tag{7}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{v} = -\operatorname{div}(\sigma\mathbf{v}), \tag{8}$$

где

$$\omega_e = \frac{eH_0}{mc};\ \varkappa_0 = \frac{\mathbf{H}_0}{H_0};\ \alpha = \frac{\Omega_0^2}{\omega_e c^3}$$

$\left(\text{здесь } \Omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m};\ v_{\text{т}}^2 = \frac{T}{m}\right)$. Зависимость всех величин от времени и координаты z ищем в виде [3] $\xi = t - \frac{z}{V_\Phi}$, где V_Φ — фазовая скорость волны.

Предполагаем, что нелинейность слабая. Малым параметром задачи является величина

* В общем случае надо пользоваться релятивистски инвариантными уравнениями [2]. Уравнение (1) и уравнение состояния справедливы при $\frac{v_{\text{т}}^2}{c^2} \ll 1$ ($v_{\text{т}}$ — средняя тепловая скорость электронов) и $\frac{k_\perp^2 c^2}{\omega_e^2} \gg 1$ ($k_\perp$ — составляющая волнового вектора вдоль радиуса волновода). Невыполнение последнего условия приводит к незначительному изменению допплеровского сдвига в частоте.

$\varepsilon = \frac{k_\perp v_0}{\omega_e}$ (v_0 — амплитуда скорости электронов плазмы линейного приближения). Нелинейные уравнения (5) — (8) будем решать асимптотическим методом разложения по малому параметру [4]. При этом давление, вязкость и трение будем считать малыми $\sim \varepsilon^3$ и учитывать в третьем приближении *. В первом приближении, линеаризуя систему (5) — (8) и решая полученные уравнения, получим при $\omega \approx \omega_e$

$$E_r = E_0 J_1 \sin\psi;\ E_\varphi = -\frac{\omega}{\omega_e} E_0 J_1 \cos\psi;$$

$$E_z = \frac{k_\perp c}{\beta} \cdot \frac{\omega}{\Omega_0} \delta E_0 J_0 \cos\psi; \tag{9}$$

$$H_r = \frac{\omega}{\omega_e} \frac{E_0}{\beta} J_1 \cos\psi;\ H_\varphi = \frac{E_0}{\beta}(1-\gamma) J_1 \sin\psi;$$

$$H_z = \frac{k_\perp c}{\omega} E_0 J_0 \sin\psi; \tag{10}$$

$$v_r = v_0 J_1 \cos\psi;\ v_\varphi = v_0 J \sin\psi;$$

$$v_z = \frac{k_\perp c}{\omega} \beta v_0 \delta J_0 \sin\psi; \tag{11}$$

$$\sigma = -\frac{k_\perp v_0}{\omega}(1-\delta) J_0 \sin\psi; \tag{12}$$

$$v_0 = \frac{2c\omega\omega_e E_0}{\omega^2-\omega_e^2};\ \omega^2-\omega_e^2 = -2\Omega_0^2\beta^2\left[1+\frac{c^2k_\perp^2}{2(\Omega_0^2-\omega_e^2)}\right], \tag{13}$$

где $J_1(k_\perp r)$ и $J_0(k_\perp r)$ — функции Бесселя первого и нулевого порядка соответственно;

$$\beta = \frac{V_\phi}{c};\ \psi = \omega\xi;\ \delta = \frac{\Omega_0^2}{\Omega_0^2-\omega_e^2+k_\perp^2 c^2};\ \gamma = \frac{k_\perp^2 c^2 \delta}{\Omega_0^2}.$$

В условиях электронного циклотронного резонанса [5] $k_\perp = \frac{\lambda_p}{a}$, где λ_p — корень первой функции Бесселя: $J_1(\lambda_p) = 0$.

Как видно из соотношений (13), при $\omega \approx \omega_e$ амплитуда скорости электронов становится очень большой, а $\beta^2 \ll \frac{\omega_e^2}{\Omega_0^2}$. Амплитуда v_0 ограничивается либо диссипативными процессами, либо нелинейностью. Ограничение нелинейностью происходит потому, что частота $\omega_e = \frac{eH_0}{mc}$ изменяется при нелинейном рассмотрении и зависит от амплитуды v_0. Покажем, что в ряде важных для приложений случаев ограничение v_0, обусловленное нелинейностью, наступает раньше, чем ограничение, обусловленное диссипацией.

Для получения уравнений второго приближения надо в правую часть уравнений (5)—(8) подставить решение первого приближения и ограничиться членами $\sim \varepsilon^2$. При $\beta^2 \ll \frac{\omega_e^2}{\Omega_0^2}$ получим уравнения

$$\frac{\partial v_r^{(2)}}{\partial\xi} + \omega_e v_\varphi^{(2)} + c\omega_e E_r^{(2)} = -\frac{k_\perp v_0^2}{2} J_1 [\delta J_0 - J_2 + J_0(1-\delta)\cos 2\psi]; \tag{14}$$

$$\frac{\partial v_\varphi^{(2)}}{\partial\xi} - \omega_e v_r^{(2)} + c\omega_e E_\varphi^{(2)} = -\frac{k_\perp v_0^2}{2} J_1 J_0 (1-\delta)\sin 2\psi; \tag{15}$$

$$\frac{\partial E_r^{(2)}}{\partial\xi} + c\beta \cdot \frac{\partial E_z^{(2)}}{\partial\xi} + \alpha c^2\beta^2 v_r^{(2)} = \alpha c\beta^2 \frac{k_\perp v_0^2}{2\omega}(1-\delta) J_1 J_0 \sin 2\psi; \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial\xi^2} + \alpha c^2\beta^2 \cdot \frac{\partial v_\varphi^{(2)}}{\partial\xi} = \alpha c^2\beta^2 k_\perp v_0^2 (1-\delta) J_1 J_0 \sin 2\psi; \tag{17}$$

$$\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 E_z^{(2)}}{\partial\xi^2} - \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial E_z^{(2)}}{\partial r}\right) - \frac{1}{c\beta}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E_r^{(2)}}{\partial\xi}\right) - \alpha c\omega_e E_z^{(2)} = \frac{k_\perp^2 v_0^2}{2\omega} c\beta\delta^2 J_0^2 \sin 2\psi - \alpha c\beta\delta(1-\delta)\frac{k_\perp^2 v_0^2}{\omega} J_0^2 \sin 2\psi; \tag{18}$$

$$\frac{\partial v_z^{(2)}}{\partial\xi} = -c\omega_e E_z^{(2)} + \frac{k_\perp^2 v_0^2}{2\omega} c\beta\delta^2 J_0^2 \sin 2\psi. \tag{19}$$

В уравнении (14) справа имеется член, не зависящий от времени. Предположим, что плазма квазинейтральна, т. е. что $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \times \int_0^T \operatorname{div} \mathbf{E}\, dt = 0$ (постоянная плотность заряда плазмы пренебрежимо мала). Тогда не зависящий от времени член определит постоянную составляющую φ-й скорости электронов плазмы во втором приближении.

* Это справедливо, если $k_\perp v^{(1)} v^{(2)} \lesssim v_T^2 k_\perp \sigma^{(1)}$, $v_T^2 k_\perp^2 \tau v^{(1)}$, $\nu v^{(1)}$ (индексы (1) и (2) указывают на соответствующие приближения). Подставляя сюда значения $v^{(1)}$, $\sigma^{(1)}$ и $v^{(2)}$ из (11), (12) и (21), найдем, что давление, вязкость и трение можно считать $\sim \varepsilon^3$, если $v_0^2 \lesssim v_T^2$, $v_T^2 \omega_e \tau$, $\frac{1}{\omega_e \tau} \frac{\omega_e^2}{k_\perp^2}$.

Из уравнений (16)—(18) видно, что $E_r^{(2)} \sim \beta^2$; $E_\varphi^{(2)} \sim \beta^2$; $E_z^{(2)} \sim \beta$. Поэтому, так как $\beta^2 \ll \frac{\omega_e^2}{\Omega_0^2}$, в левой части уравнений (14) и (15) можно пренебречь третьим членом по сравнению с двумя первыми. Таким образом, для определения $v_r^{(2)}$ и $v_\varphi^{(2)}$ получим уравнения в обыкновенных производных. Координата r играет роль параметра.

Решая уравнения (14) и (15), найдем, что

$$v_r^{(2)} = -\frac{k_\perp v_0^2}{2\omega_e}(1-\delta) J_1 J_0 \sin 2\psi; \qquad (20)$$

$$v_\varphi^{(2)} = \frac{k_\perp v_0^2}{2\omega_e}(1-\delta) J_1 J_0 \cos 2\psi - \frac{k_\perp v_0^2}{2\omega_e} J_1 \delta (\delta J_0 - J_2). \qquad (21)$$

Из уравнения (19) найдем, что $v_z^{(2)} = \beta F(r) \cos 2\psi$, где $F(r)$ — некоторая неособенная функция порядка ε^2. Для дальнейшего рассмотрения этих сведений о $v_z^{(2)}$ вполне достаточно.

Магнитное поле во втором приближении найдем из уравнения (7). Нетрудно видеть, что магнитное поле состоит из двух частей: переменной и постоянной во времени. Переменными слагаемыми магнитного поля по порядку величины относительно β являются $H_r^{(2)} \sim \beta$; $H_\varphi^{(2)} \sim \beta$; $H_z^{(2)} \sim \beta^2$. В третьем приближении, умноженные на скорости, они дадут члены $\sim \beta^2$, поэтому переменные компоненты магнитного поля, так же как и электрического, во втором приближении можно не вычислять. Для постоянной во времени составляющей z-компоненты магнитного поля найдем

$$\frac{\overline{\partial H_z^{(2)}}}{\partial r} = \frac{\Omega_0^2}{\omega_e c^2}\left(\overline{v_\varphi^{(2)}} + \overline{\sigma^{(1)} v_\varphi^{(1)}}\right), \qquad (22)$$

где черта означает среднее по времени. После вычисления получим

$$\overline{H_z^{(2)}} = \alpha_3 = C - \frac{\Omega_0^2}{\omega_e^2}\frac{v_0^2}{2c^2} J_1^2. \qquad (23)$$

Постоянную C найдем из следующего условия: так как $\overline{H_z^{(2)}}$ создается φ-м током, то на границе плазменного цилиндра $\overline{H_z^{(2)}(a)} = 0$, а поскольку $J_1(k_\perp a) = 0$, то $C = 0$; z—составляющая компонента тока создает постоянное во времени поле $\overline{H_\varphi^{(2)}}$. Можно найти, что

$$\overline{H_\varphi^{(2)}} = \alpha_2 = -\frac{\Omega_0^2}{\omega_e^2}\cdot\frac{v_0^2}{2c^2}\cdot\frac{k_\perp c\beta}{\omega_e}\delta(1-\delta)\frac{k_\perp r}{2}(J_0^2 + J_1^2). \qquad (24)$$

Таким образом, нелинейное взаимодействие изменяет магнитную проницаемость плазмы. Если в линейной теории тензор μ_{ik} диагональный и единичный, то нелинейное взаимодействие в рассматриваемых условиях изменяет компоненты μ_{33} и μ_{23}:

$$\mu_{33} = 1 + \alpha_3; \quad \mu_{23} = \alpha_2. \qquad (25)$$

Так как $\alpha_3 < 0$, то в условиях электронного циклотронного резонанса плазма нелинейно диамагнитна.

Уравнения третьего приближения для v_r и v_φ при $\beta^2 \ll 1$ имеют следующий вид:

$$\frac{\partial v_r}{\partial \xi} + \omega_e v_\varphi + c\omega_e E_r = -[(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}]_r^{(3)} - \omega_e v_\varphi^{(1)}\overline{H_z^{(2)}} - v_T^2(\nabla\sigma)_r - \nu_r v_r - \frac{v_0^2 J_1^2}{2c^2}\frac{\partial v_r^{(1)}}{\partial \xi}; \qquad (26)$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial \xi} - \omega_e v_r + c\omega_e E_\varphi = -[(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}]_\varphi^{(3)} + \omega_e v_r^{(1)}\overline{H_z^{(2)}} - \nu v_\varphi - \frac{v_0^2 J_1^2}{2c^2}\frac{\partial v_\varphi^{(1)}}{\partial \xi}, \qquad (27)$$

где

$$[(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}]^{(3)} = [(\mathbf{v}^{(1)}\nabla)\mathbf{v}^{(2)}] + [(\mathbf{v}^{(2)}\nabla)\mathbf{v}^{(1)}];$$

$$\nu_r = \tau v_T^2 k_\perp^2 \frac{2+\delta}{3} + \nu.$$

В уравнениях (26) и (27) справа содержатся первая и третья гармоники. Третьей гармоникой мы интересоваться не будем, а для первой гармоники скоростей v_r и v_φ после некоторых вычислений получим следующие уравнения [учитывая, что справа в (26) и (27) $v_0 J_1 \cos\psi = v_r$; $v_0 J_1 \sin\psi = v_\varphi$, а поля определяются значениями (9)]:

$$\frac{\partial v_r}{\partial \xi} + \left[\omega_e + \frac{v_T^2 k_\perp^2}{\omega_e}(1-\delta) + \frac{\Omega_0^2}{2\omega_e}\frac{v_0^2}{c^2}R\right]v_\varphi + \nu_r v_r = -c\omega_e E_0 J_1 \sin\psi - \frac{v_z^{(2)}}{c\beta}\frac{\partial v_r^{(1)}}{\partial \xi}; \qquad (28)$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial \xi} - \left(\omega_e + \frac{\Omega_0^2}{2\omega_e}\frac{v_0^2}{c^2}R\right)v_r + \nu v_\varphi = c\omega_e E_0 J_1 \sin\psi - \frac{v_z^{(2)}}{c\beta}\frac{\partial v_\varphi^{(1)}}{\partial \xi}, \qquad (29)$$

где

$$R(r) = \frac{1}{\Omega_0^2}\left[k_\perp^2 c^2 \delta^2 J_0^2 - (\Omega_0^2 + \omega_e^2 + k_\perp^2 c^2 \delta) J_1^2\right].$$

При выводе уравнений (28) и (29) предполагается, что $\Omega_0^2 \frac{v_0^2}{c^2}\cdot R(r) \ll \omega_e^2$; $v_T^2 k_\perp^2 \ll \omega_e^2$. Решая уравнения (28) и (29), для амплитуды скорости электронов найдем, что

$$v_0 = \frac{2c\omega_e^2 E_0}{[(\omega^2 - \omega_{re}^2)^2 + (\nu_2 + v)^2 \omega_e^2]^{1/2}}, \tag{30}$$

где

$$\omega_{re}^2 = \omega_e^2 + k_\perp^2 v_\text{т}^2 (1 - \delta) + \Omega_0^2 \frac{v_0^2}{c^2} R(r). \tag{31}$$

Величина ω_{re} является ларморовской частотой электрона в поле волны в плазменном цилиндрическом волноводе. Из (31) видно, что ω_{re} зависит как от квадрата амплитуды скорости, так и от положения частицы относительно оси волновода.

При $\omega^2 \approx \omega_e^2 + k_\perp^2 v_\text{т}^2 (1 - \delta)$ из (30) получим

$$v_0 = \frac{2c\omega_e^2 E_0}{\left[\frac{v_0^4 \Omega_0^4}{c^4} R^2 + (\nu_r + \nu)^2 \omega_e^2\right]^{1/2}}. \tag{32}$$

Примем, что $\frac{v_0^4 \Omega_0^4}{c^4} \gg (\nu_r + \nu)^2 \omega_e^2$. В ряде случаев, представляющих интерес для приложений (например, нагрева плазмы), параметры плазмы таковы, что это условие выполняется. Тогда максимальная скорость, приобретаемая электроном в циклотронном резонансе, определится соотношением

$$v_0 = c\left(2 \frac{\omega_e^2}{\Omega_0^2} \cdot \frac{E_0}{R(r)}\right)^{1/3}. \tag{33}$$

Следует заметить, что при известных r величина $R(r)$ обращается в нуль. В этих точках v_0 определяется диссипативными процессами. Однако число электронов, находящихся в области $R(r) = 0$, мало, поэтому средняя по сечению волновода максимальная скорость определяется нелинейностью.

Автор пользуется случаем выразить искреннюю благодарность Я. Б. Файнбергу за предложенную тему и руководство работой.

Поступила в Редакцию 15/VII 1963 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. И. Брагинский «Ж. эксперим. и теор. физ.», 33, 457 (1957).
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. М., Гостехтеоиздат, 1953.
3. Я. Б. Файнберг. «Атомная энергия», 6, 447 (1959).
4. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1958.
5. Я. Б. Файнберг, М. Ф. Горбатенко. «Ж. техн. физ.», 29, 549 (1959).

УДК 539.125.52

Спектры медленных нейтронов в воде с поглотителями

Н. И. Лалетин

Приводятся результаты расчетов спектров медленных нейтронов в воде с бором, кадмием и самарием. Спектры рассчитывались с помощью дифференциального уравнения, предложенного автором ранее, причем в качестве функций, характеризующих обмен энергией нейтрона со средой, брались функции, полученные с использованием модели переменной эффективной массы [1], а также постоянные $\xi\sigma_s = \text{const}$, $\gamma = 1$. Результаты расчетов сравниваются с экспериментальными данными, с расчетными кривыми, полученными для газовой модели с массой $m = 1$, в приближении тяжелого газа, а также с кривыми, полученными с ядром Нелкина [2]. Показано, что модель переменной эффективной массы неудовлетворительно описывает спектры нейтронов в воде; использование функций $\xi\sigma_s = \text{const}$, $\gamma = 1$ дает результаты, более близкие к экспериментальным. Они лишь незначительно отличаются от полученных с ядром Нелкина и представляют лучшее приближение по сравнению с приближением, которое дает газовая модель.

В предыдущей работе автора [3] было предложено дифференциальное уравнение для описания энергетического распределения медленных нейтронов в бесконечной однородной среде. Запишем это уравнение в виде

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dQ}{dz} = \psi_a; \\ &Q = \frac{(\xi\psi_s^0)^2}{\xi\psi_s^0 + \frac{d}{dz}(\xi\psi_s^0)} \cdot \frac{d}{dz}\left(\frac{\psi_s + \frac{\gamma}{\xi}\psi_a}{\psi_s^0}\right). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Здесь $z = \frac{E}{kT}$ — энергия, измеренная в единицах температуры T; Q — ток нейтронов по энергетической оси; $\psi_s = \sigma_s(z)\,\Phi(z)$ плотность