Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 6

УДК 517.925

МАТЕМАТИКА

А. Д. БРЮНО

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ МНОЖЕСТВА

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 16 IX 1974)

Пусть у аналитической автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений имеется инвариантный неприводимый k-мерный тор $\mathcal{T}$, заполненный условно периодическими решениями; $k\geqslant 0$.

Задача 1. В окрестности тора $\mathcal{T}$ найти все инвариантные аналитические множества, содержащие тор $\mathcal{T}$.

Для решения этой классической задачи воспользуемся преобразованием исходной системы к нормальной форме ([1]). Предположим, что система на торе $\mathcal{T}$ приводима, и $(\omega_1,\ldots,\omega_k)=\Omega$ — частоты на торе $\mathcal{T}$, тогда

$$\langle P,\ \Omega\rangle\equiv p_1\omega_1+\ldots+p_k\omega_k\neq 0 \tag{1}$$

для всех $P\in\mathbf{Z}^k$, $P\neq 0$. Предположим также, что система в вариациях приводима и имеет l собственных чисел с нулевыми вещественными частями $(\lambda_1,\ldots,\lambda_l)=\Lambda$ и m — с ненулевыми $(\mu_1,\ldots,\mu_m)=M$. Тогда в подходящих локальных координатах ([1]) $X=(x_1,\ldots,x_k)$, $Y=(y_1,\ldots,y_l)$, $Z=(z_1,\ldots,z_m)$ система примет вид

$$\begin{aligned}\dot X&=\Omega+F^{(0)}(X,\ Y,\ Z,\ E),\\ \dot Y&=A^{(1)}Y+F^{(1)}(X,\ Y,\ Z,\ E),\\ \dot Z&=A^{(2)}Z+F^{(2)}(X,\ Y,\ Z,\ E),\end{aligned}\tag{2}$$

где $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ — постоянные матрицы, имеющие нормальную форму, их диагонали суть Λ и M соответственно; $E=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ — малые параметры. Функции $F^{(j)}$ аналитичны по всем переменным и 2π-периодичны по X в области

$$|\operatorname{Im}X|<\varepsilon_0,\quad |Y|<\varepsilon_0,\quad |Z|<\varepsilon_0,\quad |E|<\varepsilon_0, \tag{3}$$

т. е. они разлагаются в ряды Тейлора — Фурье

$$F^{(j)}=\sum F^{(j)}_{PQRS}Y^QZ^RE^S\exp i\langle P,X\rangle, \tag{4}$$

где $P\in\mathbf{Z}^k$, $0\leqslant Q\in\mathbf{Z}^l$, $0\leqslant R\in\mathbf{Z}^m$, $0\leqslant S\leqslant\mathbf{Z}^n$, $Y^Q=y_1^{q_1}\ldots y_l^{q_l}$, и ряды (4) абсолютно сходятся в области (3). При $Y=0$, $Z=0$, $E=0$ аннулируются функции $F^{(0)}$, $F^{(1)}$, $F^{(2)}$ и матрицы $\partial F^{(1)}/\partial Y$, $\partial F^{(1)}/\partial Z$, $\partial F^{(2)}/\partial Y$, $\partial F^{(2)}/\partial Z$. Тор $\mathcal{T}$ определяется уравнениями $\operatorname{Re}X=0$, $Y=0$, $Z=0$, $E=0$.

1. Обозначим через $\mathcal{P}_X$ кольцо функций $f(X)$, аналитических и 2π-периодических по X вблизи $\operatorname{Im}X=0$. Функция $f(X)\in\mathcal{P}_X$ разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье. Обозначим через $\mathcal{P}_X[[Y,\ Z,\ E]]$ кольцо формальных степенных рядов от Y, Z, E с коэффициентами из $\mathcal{P}_X$; всякий ряд из $\mathcal{P}_X[[Y,Z,E]]$ может быть представлен в виде (4).

Пусть $\operatorname{Re}\mu_1\leqslant\ldots\leqslant\operatorname{Re}\mu_{m_-}<0<\operatorname{Re}\mu_{m_-+1}\leqslant\ldots\leqslant\operatorname{Re}\mu_m$. Всякий вектор $W=(w_1,\ldots,w_m)$ будем разбивать на два подвектора $W_-=(w_1,\ldots,w_{m_-})$ и $W_+=(w_{m_-+1},\ldots,w_m)$. Сделаем формальную замену локальных координат:

$$\begin{aligned}X&=U+\Xi^{(0)}(U,\ V,\ W,\ E),\\ Y&=V+\Xi^{(1)}(U,\ V,\ W,\ E),\\ Z&=W+\Xi^{(2)}(U,\ V,\ W,\ E),\end{aligned}\tag{5}$$

где ряды $\xi_j \in \mathscr{P}_U[[V, W, E]]$; при $V=0$, $W=0$, $E=0$ аннулируются векторы $\Xi^{(0)}$, $\Xi^{(1)}$, $\Xi^{(2)}$ и матрицы $\partial\Xi^{(1)}/\partial V$, $\partial\Xi^{(1)}/\partial W$, $\partial\Xi^{(2)}/\partial V$, $\partial\Xi^{(2)}/\partial W$. Замена (5) обратима, она переводит систему (2) в формальную систему

$$\begin{aligned} \dot U &= \Phi(U, V, E) + \check\Phi(U, V, W, E), \\ \dot V &= \Psi(U, V, E) + \check\Psi(U, V, W, E), \\ \dot W_- &= \mathrm{X}_-(U, V, W_-, E) + \check{\mathrm{X}}_-(U, V, W, E), \\ \dot W_+ &= \mathrm{X}_+(U, V, W_+, E) + \check{\mathrm{X}}_+(U, V, W, E), \end{aligned} \tag{6}$$

где правые части принадлежат $\mathscr{P}_U[[V, W, E]]$; $\check\Phi=0$, $\check\Psi=0$ при $W=0$; $\check{\mathrm{X}}_-=0$ при $W_+=0$; $\check{\mathrm{X}}_+=0$ при $W_-=0$; наконец, $\Phi=\Omega$, $\Psi=0$, $\mathrm{X}=0$, $\partial\Psi/\partial V=A^{(1)}$, $\partial\mathrm{X}/\partial V=0$, $\partial\mathrm{X}/\partial W=0$ при $V=0$, $W=0$, $E=0$. Ряды Φ и Ψ не зависят от W, а ряды X_- и X_+ — от W_+ и W_- соответственно. Рассмотрим для них разложения

$$\Phi = \sum \Phi_{PQS} V^Q E^S \exp i\langle P, U\rangle; \tag{7}$$

$$\psi_j = v_j g_j = v_j \sum g_{jPQS} V^Q E^S \exp i\langle P, U\rangle; \tag{8}$$

$$\chi_j = w_j h_j = w_j \sum h_{jPQRS} V^Q W^R E^S \exp i\langle P, U\rangle. \tag{9}$$

Систему (6) назовем полунормальной формой ([2]), если:

1) разложения (7), (8) обладают свойствами нормальной формы, т. е. коэффициенты Φ_{PQS} и g_{jPQS} отличны от нуля только при

$$i\langle P, \Omega\rangle + \langle Q, \Lambda\rangle = 0. \tag{10}$$

2) $\check\Phi=0$, $\check\Psi=0$, $\mathrm{X}_-=\check{\mathrm{X}}_-=0$ при $W_-=0$;

$\check\Phi=0$, $\check\Psi=0$, $\mathrm{X}_+=\check{\mathrm{X}}_+=0$ при $W_+=0$.

3) в разложении (9) отличны от нуля лишь те коэффициенты h_{jPQRS}, для которых $\langle R, \operatorname{Re} M\rangle=0$.

Обозначим $\mathbf{N}_j^l=\{Q\colon Q\in\mathbf{Z}^l,\ q_j\geqslant -1$, остальные координаты $\geqslant 0\}$ и $\mathbf{N}^l=\mathbf{N}_1^l\cup\ldots\cup\mathbf{N}_l^l$. Для каждого $Q\in\mathbf{N}^l$ положим

$$\tilde\gamma(Q) = \varliminf |P|^{-1} \ln |i\langle P, \Omega\rangle + \langle Q, \Lambda\rangle|,$$

где нижний предел берется по тем $P\in\mathbf{Z}^k$, которые не удовлетворяют уравнению (10), при $|P|\to\infty$.

Ограничение 1. $\tilde\gamma(Q)\geqslant 0$ для всех $Q\in\mathbf{N}^l$ *.

Теорема 1. *Для системы* (2), *удовлетворяющей ограничению* 1, *существует формальное преобразование* (5) *к полунормальной форме* (6).

Для полунормальной формы (6) интегральными являются формальные многообразия

$$\mathscr{W}_- = \{U, V, W, E\colon W_+=0\}, \quad \mathscr{W}_+ = \{U, V, W, E\colon W_-=0\},$$

$$\mathscr{V} = \{U, V, W, E\colon W=0\} = \mathscr{W}_- \cap \mathscr{W}_+.$$

2. Система уравнений $f_1=\ldots=f_s=0$ определяет формальное множество $\mathscr{M}$, если все $f_j\in\mathscr{P}_U[[V, W, E]]$ и $f_j=0$ при $V=0$, $W=0$, $E=0$. В кольце $\mathscr{P}_U[[V, W, E]]$ формальному множеству $\mathscr{M}$ соответствует идеал $\mathscr{I}$. Множество $\mathscr{M}$ является аналитическим, если в идеале $\mathscr{I}$ есть базис из абсолютно сходящихся рядов. Ряд $\xi\in\mathscr{P}_U[[V, W, E]]$ сходится на множестве $\mathscr{M}$, если существует такой абсолютно сходящийся ряд $\eta\in\mathscr{P}_U[[V, W, E]]$, что $\xi-\eta\in\mathscr{I}$.

* В работе ([3]) в ограничениях 3 (п. 1—Г) и 3′ (п. 5—А) неравенство $\gamma(Q)>-\infty$ надо заменить на $\tilde\gamma(Q)\geqslant 0$.

Задача 2. Найти формальные множества, на которых полунормализующее преобразование (5) сходится.

По полунормальной форме (6) определим формальное множество

$$\mathcal{A}_W=\{U,\ V,\ W,\ E\colon\ \Phi=\Omega a,\quad \psi_j=\lambda_j v_j a,\quad j=1,\ldots,l\},\tag{11}$$

где a — свободный параметр. Множество $\mathcal{A}_W$ содержит инвариантные подмножества $\mathcal{A}_-=\mathcal{A}_W\cap\mathcal{W}_-$, $\mathcal{A}_+=\mathcal{A}_W\cap\mathcal{W}_+$ и $\mathcal{A}=\mathcal{A}_W\cap\mathcal{V}=\mathcal{A}_-\cap\mathcal{A}_+$. При этом множество $\operatorname{Re}\mathcal{A}$ заполнено условно периодическими решениями, а на множествах $\operatorname{Re}\mathcal{A}_-$ и $\operatorname{Re}\mathcal{A}_+$ решения стремятся к $\operatorname{Re}\mathcal{A}$ при $t\to+\infty$ и $-\infty$ соответственно.

Теорема 2. *Если в системе* (2) *числа* $i\omega_1,\ldots,i\omega_k,\ \lambda_1,\ldots,\lambda_l$ *попарно соизмеримы, то полунормализующее преобразование* (5) *аналитично на множестве* $\mathcal{A}_W$, *и само это множество аналитично.*

Пусть $L=\{\lambda_1,\ldots,\lambda_l\}$ — диагональная матрица. Рассмотрим на множестве $\mathcal{A}_W$ квадратную матрицу порядка $k+l$

$$B=\begin{pmatrix}\partial\Phi/\partial U & \partial\Phi/\partial V\\ \partial\Psi/\partial U & \partial\Psi/\partial V-La\end{pmatrix},\tag{12}$$

где a — тот же параметр, что и в (11). Множеством $\mathcal{B}_W$ назовем такое подмножество множества $\mathcal{A}_W$, на котором матрица (12) нильпотентна, т. е.

$$\mathcal{B}_W=\{U,\ V,\ W,\ E\colon\ U,\ V,\ W,\ E\in\mathcal{A}_W,\ \ B^{k+l}=0\}.$$

Положим $\alpha_j=\min|i\langle P,\Omega\rangle+\langle Q,\Lambda\rangle|$ по $P\in\mathbf{Z}^k$, $Q\in\mathbf{N}^l$, $i\langle P,\Omega\rangle+\langle Q,\Lambda\rangle\neq0$, $|P|+|Q|<2^j$, $j=1,2,\ldots$

Условие β.

$$\sum_{j=1}^{\infty}2^{-j}\ln\alpha_j>-\infty.$$

Теорема 3. *Если для системы* (2) *выполнено условие* β, *то полунормализующее преобразование* (5) *сходится на множестве* $\mathcal{B}_W$ *и само это множество аналитично.*

3. Пусть $0\leqslant l'\leqslant l$; рассмотрим координатное подпространство

$$\mathcal{K}_W=\{U,\ V,\ W,\ E\colon\ v_{l'+1}=\ldots=v_l=0\}.$$

Теорема 4. *Если числа* $i\omega_1,\ldots,i\omega_k,\ \lambda_1,\ldots,\lambda_{l'}$ *попарно соизмеримы, то множество* $\mathcal{A}_W'=\mathcal{A}_W\cap\mathcal{K}_W$ *аналитично в системе* (2).

Условие β′.

$$\sum_{j=1}^{\infty}2^{-j}\ln\alpha_j'>-\infty,$$

где α_j' определяются так же, как α_j, но при добавочном ограничении $q_{l'+1}+\ldots+q_l\leqslant0$.

Теорема 5. *Если для системы* (2) *выполнено условие* β′, *то множество* $\mathcal{B}_W''=\mathcal{B}_W\cap\mathcal{K}_W$ *аналитично для системы* (2).

Множества $\mathcal{A}_W'$ и $\mathcal{B}_W''$ содержат инвариантные компоненты, получающиеся при пересечении с множествами $\mathcal{W}_-$, $\mathcal{W}_+$, $\mathcal{V}$. Теоремы 4 и 5 обобщают теоремы 2 и 3; согласно (1) теоремы 2 и 4 работают только при $k=0$ и $k=1$, когда $\mathcal{T}$ — неподвижное или периодическое решение соответственно. Итак, если нет «малых знаменателей», то аналитическим будет множество $\mathcal{A}_W$ или его подмножество $\mathcal{A}_W'$ (теоремы 2 и 4). Если же есть «малые знаменатели», то аналитическим будет множество $\mathcal{B}_W$, которое выделяется в множестве $\mathcal{A}_W$ условием нильпотентности матрицы (12). В некоторых специальных системах (гамильтоновых или обратимых) матрица (12) всюду нильпотентна и вычисление множества $\mathcal{B}_W$ упрощается. В ([3]) показано, что теоремы 1—5 охватывают три группы результатов: 1) об аналитичности нормализующего и полунормализующего преобразований (см. ([2], [4–6]) и др.); 2) о существовании периодических решений и продолжении их по параметру — теоремы Ляпунова, Пуанкаре и их обобщения (см. ([7], [8]) и др.); 3) о существовании условно периодических решений и о их продолжении по параметрам (см. ([9–15]) и др.).

Пример. Пусть $k=l\geqslant 2$, $m=0$, $n=1$ и система (2) гамильтонова. Тогда $\Lambda=0$ и нормальная форма (6) также гамильтонова,

$$\dot U=\partial h/\partial V,\quad \dot V=-\partial h/\partial U,$$

где благодаря (1) гамильтониан h не зависит от U:

$$h=\langle V,\Omega\rangle+{}^1/_2\langle CV, V\rangle+O(\varepsilon)+O(|V|^3). \tag{13}$$

Поэтому $\Psi\equiv-\partial h/\partial U=0$ и множество $\mathscr{A}=\mathscr{A}_W$ определяется системой

$$\Phi\equiv\partial h/\partial V=\Omega a. \tag{14}$$

Матрица (12) везде нильпотентна, ибо

$$B=\begin{pmatrix}0 & \partial^2 h/\partial V\,\partial V\\ 0 & 0\end{pmatrix};$$

т. е. множество $\mathscr{B}=\mathscr{A}$ определяется системой (14), которая согласно (13) имеет вид $CV+\ldots=\Omega(a-1)$. Если $\det C\neq 0$, то по теореме о неявной функции эта система имеет единственное решение $V=V^0(a-1,\varepsilon)$, $V^0(0,0)=0$. Оно дает двупараметрическое семейство k-мерных инвариантных торов с частотами Ωa. Если Ω удовлетворяет условию β, то по теореме 3 это семейство аналитично. При $a=1$ получаем однопараметрическое семейство k-мерных торов с частотами Ω — это теорема 1 в ([9]).

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
10 IX 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. Д. Брюно*, О локальных задачах механики, препринт ИПМ, № 96, 1973. [2] *А. Д. Брюно*, Тр. Московск. матем. общ., т. 25, 119 (1971); т. 26, 199 (1972). [3] *А. Д. Брюно*, Множества аналитичности нормализующего преобразования, препринты ИПМ, № 97 и 98, 1974. [4] *А. Д. Брюно*, ДАН, т. 216, № 2, 253 (1974). [5] *А. Д. Брюно*, Математич. заметки, т. 16, № 3, 407 (1974). [6] *Э. Г. Белага*, ДАН, т. 143, № 2, 255 (1962). [7] *К. Л. Зигель*, Лекции по небесной механике, М., 1959. [8] *J. Henrard*, J. Diff. Equat., v. 14, № 3, 431 (1973). [9] *А. Н. Колмогоров*, ДАН, т. 98, № 4, 527 (1954). [10] *В. И. Арнольд*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 25, № 1, 21 (1961). [11] *Ю. Мозер*, Математика, т. 6, № 5, 51 (1962). [12] *Ю. Мозер*, УМН, т. 24, № 2, 165 (1969). [13] *Н. Н. Боголюбов*, Тр. Первой летней математич. школы, т. 1, Киев, 1964. [14] *Ю. Н. Бибиков*, ДАН, т. 213, № 4, 766 (1973). [15] *S. M. Graff*, J. Diff. Equat., v. 15, № 1, 1 (1974).