Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 1

УДК 530.145 *МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА*

Б. Г. КОНОПЕЛЬЧЕНКО, Ю. Б. РУМЕР

НЕКОМПАКТНАЯ АЛГЕБРА SO(2,1) И КЛАССИФИКАЦИЯ ПОТЕНЦИАЛОВ В УРАВНЕНИИ ШРЕДИНГЕРА

(Представлено академиком С. Т. Беляевым 16 V 1974)

Мы рассматриваем возможность формулировки задач квантовой механики не на языке операторов p и q алгебры Гайзенберга, а на языке операторов N_1, N_2, N_3 некомпактной алгебры SO(2,1). Мы покажем, что для некоторого класса потенциалов уравнение Шредингера $(p^2/2m+V(q)-E)\psi=0$ может быть записано в «N-представлении» в виде

$$[Q-\overset{-}{N}\overset{+}{N}-R(E,l)\overset{-}{N}^2+S(E,l)\overset{-}{N}-T(E,l)]\psi=0, \qquad (1)$$

где $\overset{\pm}{N}=N_3\pm N_1$, оператор Казимира $Q=-N_1^2-N_2^2+N_3^2$, коэффициенты R, S, T могут зависеть как от энергии E, так и от орбитального момента l.

Выбираем то представление алгебры SO(2,1), для которого $Q\equiv\varphi(\varphi+1)=T$ и, линеаризуя уравнение (1), получаем

$$\overset{+}{N}+R\overset{-}{N}-S=0.$$

Далее, совершая каноническое преобразование $\overset{\pm}{N}\to\overset{\pm}{N}e^{\mp\theta}$ (тильт) [1], где для дискретного спектра $e^\theta=\sqrt{R}$, и учитывая, что спектр оператора N_3 имеет вид $\{N_3\}=-\varphi+n$, $n=0, 1, 2, \ldots$, находим уравнение

$$^1/_2+n+\sqrt{^1/_4+T(E,l)}=\frac{S(E,l)}{2\sqrt{R(E,l)}}, \qquad (2)$$

которое определяет спектр энергии системы, описываемой уравнением (1), как функцию квантовых чисел n и l.

Выберем реализацию операторов $\overset{+}{N}$, $\overset{-}{N}$, N_2 в виде

$$\begin{gathered}\overset{-}{N}=\alpha(r), \qquad iN_2=f(r)+g(r)\frac{d}{dr}, \\ \overset{+}{N}=\lambda(r)+\mu(r)\frac{d}{dr}+\nu(r)\frac{d^2}{dr^2}.\end{gathered} \qquad (3)$$

Шесть функций α, f, g, λ, μ, ν удовлетворяют четырем независимым уравнениям, вытекающим из перестановочных соотношений для операторов N_1, N_2, N_3 [2]. Если в качестве двух произвольных функций выбрать α и f и использовать выражение для оператора Казимира, то общее решение этих уравнений имеет вид [2]

$$\begin{gathered}g=\frac{\alpha}{\alpha'}, \qquad \nu=-\frac{\alpha}{\alpha'^2}, \qquad \mu=-\frac{2f}{\alpha'}+\frac{\alpha\alpha''}{\alpha'^3}, \\ \lambda=-\frac{f^2}{\alpha}+\frac{f}{\alpha}-\frac{f'}{\alpha}+\frac{\varphi(\varphi+1)}{\alpha},\end{gathered} \qquad (4)$$

где штрих обозначает дифференцирование по r.

Запишем уравнение (1) в реализации (3), учитывая (4):

$$\frac{\alpha^2}{\alpha'^2}\frac{d^2}{dr^2}+\left(2f\frac{\alpha}{\alpha'}-\frac{\alpha^2\alpha''}{\alpha'^3}\right)\frac{d}{dr}+f^2-f+\frac{\alpha}{\alpha'}f'-R\alpha^2+S\alpha-T=0. \qquad (5)$$

Для сферически-симметричных задач радиальное уравнение Шредингера имеет вид

$$\left(-\frac{1}{2m}\frac{d^2}{dr^2}-\frac{1}{mr}\frac{d}{dr}+\frac{l(l+1)}{2mr^2}+U(r)-E\right)\psi(r)=0. \qquad (6)$$

Сравнивая (5) и (6), находим условия существования «N-представления» (1) для уравнения (6):

$$2f\frac{\alpha}{\alpha'}-\frac{\alpha^2\alpha''}{\alpha'^3}=\frac{2}{r}\frac{\alpha^2}{\alpha'^2}, \qquad (7)$$

$$\frac{\alpha^2}{\alpha'^2}\left(f^2-f+\frac{\alpha}{\alpha'}f'-R\alpha^2+S\alpha-T\right)=-\frac{l(l+1)}{r^2}+2mE-2mU(r). \qquad (8)$$

Из (7) и (8) следует

$$U(r)=E-\frac{l(l+1)}{2mr^2}+\frac{R}{2m}\alpha'^2-\frac{S}{2m}\frac{\alpha'^2}{\alpha}+\frac{T}{2m}\frac{\alpha'^2}{\alpha^2}+\frac{3}{8m}\frac{\alpha''^2}{\alpha'^2}-\frac{1}{4m}\frac{\alpha'''}{\alpha'}. \qquad (9)$$

Для потенциалов, не зависящих от E и l, получаем условия

$$\frac{\partial R}{\partial E}-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial S}{\partial E}+\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial T}{\partial E}=-\frac{2m}{\alpha'^2}, \qquad (10)$$

$$\frac{\partial R}{\partial l}-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial S}{\partial l}+\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial T}{\partial l}=\frac{2l+1}{r^2\alpha'^2}, \quad l\neq 0. \qquad (11)$$

Таким образом, только для потенциалов, удовлетворяющих уравнениям (9)–(11), задачи квантовой механики могут быть сформулированы на языке алгебры SO(2, 1), т. е. в «N-представлении».

Все задачи, удовлетворяющие (9)–(11), можно разбить на три класса. Для потенциалов первого класса только одна из величин $\partial R/\partial E$, $\partial S/\partial E$, $\partial T/\partial E$ отлична от нуля и максимум одна из величин $\partial R/\partial l$, $\partial S/\partial l$, $\partial T/\partial l$ отлична от нуля. Для потенциалов первого класса система уравнений (9)–(11) имеет только три решения [2]:

1) $\partial R/\partial E\neq 0$, $\partial T/\partial l\neq 0$; $\partial S/\partial E=\partial T/\partial E=\partial R/\partial l=\partial S/\partial l=0$.

$$R(E)=R'E, \quad R'=\text{const}<0, \qquad \alpha(r)=\sqrt{-\frac{2m}{R'}}\,r.$$
$$T(l)=l(l+1)+A, \quad A=\text{const},$$

Спектр энергии определяется формулой (2) и имеет вид

$$E=-\frac{S^2}{4(-R')}\left({}^1/_2+n+\sqrt{l(l+1)+{}^1/_4+A}\right)^{-2}.$$

Потенциал

$$U(r)=-\frac{S}{\sqrt{-2mR'}}\frac{1}{r}+\frac{A}{2m}\frac{1}{r^2}$$

2) $\partial S/\partial E\neq 0$, $\partial T/\partial l\neq 0$; $\partial R/\partial E=\partial T/\partial E=\partial R/\partial l=\partial S/\partial l=0$.

$$S(E)=S'E, \quad S'=\text{const}, \qquad \alpha(r)=\frac{m}{2S'}r^2.$$
$$T(l)={}^1/_4 l(l+1)+B, \quad B=\text{const},$$

Спектр

$$E=\frac{2\sqrt{R}}{S'}\left(\frac{1}{2}+n+\sqrt{{}^1/_4 l(l+1)+{}^1/_4+B}\right)$$

и потенциал

$$U(r)=\frac{mR}{2S'^2}r^2+\left(\frac{2B}{m}+\frac{3}{8m}\right)\frac{1}{r^2}$$

3) $l=0$. $\partial T/\partial E\neq 0$; $\partial R/\partial E=\partial S/\partial E=\partial R/\partial l=\partial S/\partial l=\partial T/\partial l=0$.

$$T(E)=T'E-{}^1/_4,\qquad T'=\mathrm{const}<0,\qquad \alpha(r)=\exp\left(-\sqrt{-\frac{2m}{T'}}r\right).$$

Спектр

$$E=-\frac{1}{(-T')}\left(\frac{S}{2\sqrt{R}}-\frac{1}{2}-n\right)^2.$$

Потенциал:

$$U(r)=\frac{R}{(-T')}\exp\left(-2\sqrt{-\frac{2m}{T'}}r\right)-\frac{S}{(-T')}\exp\left(-\sqrt{-\frac{2m}{T'}}r\right).$$

Эти три потенциала уже рассматривались ранее в работах ([1, 3, 4]). Мы здесь показали, что перечисленными тремя потенциалами исчерпываются потенциалы первого класса.

Для потенциалов второго класса, когда две из производных в уравнении (10) и две производные в уравнении (11) отличны от нуля, и потенциалов третьего класса, когда все производные отличны от нуля, нахождение явного вида потенциалов связано с алгебраическими трудностями и они могут быть заданы лишь в неявном виде ([2]).

Для задач всех трех классов существует простое соотношение между волновыми функциями $\psi_n(r)$ дискретного спектра и собственными функциями $Q_n^{(3)}(r)$ оператора N_3 ([2]):

$$\psi_n(r)=\hat{\psi}_n(\alpha)=\hat{Q}_n^{(3)}(\sqrt{R}\,\alpha),$$

где $\hat{Q}_n^{(3)}(\alpha)=\acute{Q}_n^{(3)}(r)$ и зависимость α от r определяется формулой (10).

Институт ядерной физики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
7 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Y. Nambu*, In: Proc. Intern. Conf. Particles and Fields, N. Y., 1967. [2] *Б. Г. Конопельченко, Ю. Б. Румер*, Препринт ИЯФ СОАН СССР, 1974. [3] *P. Cordero*, Lett. Nuovo Cim., v. 4, 164 (1970). [4] *P. Cordero, S. Hojman*, Lett. Nuovo Cim., v. 4, 1123 (1970).