Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 6

УДК 519.46

МАТЕМАТИКА

Ю. В. ДЗЯДЫК

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ, РЕАЛИЗУЕМЫЕ В ВЕКТОРНЫХ ПОЛЯХ НА КОМПАКТНЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 26 VII 1974)

В статье ([1]) автором установлены общие теоремы о спектре индуцированных представлений на компактных симметрических пространствах. В настоящей статье эти результаты применяются к исследованию важнейшего частного случая индуцированных представлений — изучению спектра пространства векторных полей на компактном симметрическом пространстве.

1°. Ниже будем использовать обозначения ([1]) с оговоркой, что все векторные пространства, в том числе алгебры Ли, рассматриваются над полем комплексных чисел.

Через $\mathfrak{g}_+\ominus\mathfrak{m}_+$ обозначает подпространство $\sum\limits_{\substack{\gamma>0\\ \gamma\notin 6}}\mathfrak{g}^\gamma$ алгебры $\mathfrak{g}$; это пространство изоморфно, как $\mathfrak{m}$-модуль, пространству $\mathfrak{p}\ominus\mathfrak{a}$; здесь через $\ominus$ обозначается ортогональное дополнение относительно формы Киллинга.

Для любого $\mathfrak{m}$-модуля V через $W(V)$ обозначим подпространство векторов, старших для подалгебры $\mathfrak{m}$. Размерность пространства $W(\mathfrak{p}\ominus\mathfrak{a})$ для симметрических пространств с неабелевой подалгеброй $\mathfrak{m}$ приводится в табл. 1 (если подалгебра $\mathfrak{m}$ абелева, то $W(\mathfrak{p})=\mathfrak{p}$).

Будем называть корневой вектор x_γ с р е д н и м вектором α-серии, если $[x_\alpha, x_\gamma]\neq 0$, $[x_{-\alpha}, x_\gamma]\neq 0$. Вектор, не являющийся средним вектором α-серии, будем называть к р а й н и м для корня α.

П р е д л о ж е н и е. *Пусть $x_\gamma\in W(\mathfrak{g}_+\ominus\mathfrak{m}_+)$, причем x_γ — средний для некоторого корня α. Пусть симметрическое пространство G/K неприводимо. Тогда*

(I) *алгебра $\mathfrak{g}$ имеет тип B, C, F или G;*

(II) *симметрическое пространство G/K имеет тип* II, *или же* rang $G/K=$rang G;

(III) *корень α единствен.*

Перечень корней γ, средних для некоторого простого корня α, приводится в табл. 2.

2°. Пусть γ — вес алгебры $\mathfrak{g}$, причем для любого компактного простого корня β выполняется условие $\langle\gamma, \beta\rangle\geqslant 0$. Через $\tilde{\gamma}$ будем обозначать наименьший старший вес алгебры $\mathfrak{g}$ вида $\gamma+\lambda_0$, $\lambda_0\in I(0)$. Через $\lambda_0(\alpha)$ будем обозначать наименьший вес $\lambda\in I(0)$, удовлетворяющий условию $\langle\lambda, \alpha\rangle\neq 0$.

Определим для каждого корня γ алгебры $\mathfrak{g}$ такого, что $x_\gamma\in W(\mathfrak{g}_+\ominus\mathfrak{m}_+)$, старший вес $\Lambda(\gamma)$ алгебры $\mathfrak{g}$ условием:

$$\Lambda(\gamma)=\begin{cases}\tilde{\gamma}, \text{ если для всех простых корней } \alpha \text{ вектор } x_\gamma \text{ крайний или если}\\ \mathfrak{g}=G_2,\ \mathfrak{g}_\alpha=A_1,\ \gamma=\alpha_1+\alpha_2;\\ \tilde{\gamma}+\lambda_0(\alpha), \text{ если } x_\gamma \text{ — средний вектор } \alpha\text{-серии корней (за исключе-}\\ \text{нием упомянутого случая).}\end{cases}$$

Основное содержание статьи заключается в следующем утверждении.

Т е о р е м а. *Пусть $\{x_{\gamma_1}, \ldots, x_{\gamma_{n-p}}\}$ — базис весовых векторов пространства $W(\mathfrak{g}_+\ominus\mathfrak{m}_+)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ — старшие веса, определенные в* ((1), *п.* 6). *Положим*

$$\Lambda_i=\begin{cases}\lambda_i, & i=1,\ldots,p,\\ \Lambda(\gamma_{i-p}), & i=p+1,\ldots,n.\end{cases}$$

Тогда

$$\bar{I}(\mathfrak{p})=\bigcup_{i=1}^{n}\{\Lambda_i+\lambda_0, \lambda_0\in I(0)\}.$$

Эта теорема иллюстрируется табл. 3, в которой приведены веса Λ_i для представления в векторных полях на компактных симметрических пространствах ранга 1 (за исключением сфер, для которых спектр найден в работе ([2])). Используя результаты Д. П. Желобенко ([3]), можно показать, что в этих случаях множество $\bar{I}(\mathfrak{p})$ совпадает со спектром $I(\mathfrak{p})$ представления в векторных полях.

Таблица 1

Размерность пространства $W(\mathfrak{p}\ominus\mathfrak{a})$ для симметрических пространств с неабелевой подалгеброй $\mathfrak{m}$

G/K	$\mathfrak{m}$	$n-p=$ $=\dim W(\mathfrak{p}\ominus\mathfrak{a})$	Примечания	G/K	$\mathfrak{m}$	$n-p$
A II	A_1^{p+1}	$p(p+1)/2$		E III	$A_3\cdot D_1$	8
A III	$A_{l-2p}\cdot D_1^p$	$p(2p+1)$	$p\leqslant(l-1)/2$	E IV	D_4	3
B I	B_{l-p}	p^2	$p\leqslant l-1$	E VI	A_1^3	24
D I	D_{l-p}	p^2	$p\leqslant l-2$	E VII	D_4	9
D III	A_1^p	p^2	$l=2p$	E IX	D_4	24
D III	$A_1^p\cdot D_1$	$p(p+2)$	$l=2p+1$	F II	B_3	2
C II	$C_{l-2p}\cdot A_1^p$	$p(p+1)$				

Таблица 2

Положительные корни γ, удовлетворяющие условию $\{\exists\alpha\in\Pi\colon\ \gamma\pm\alpha\in\Sigma\}$.

$\mathfrak{g}$	$\{\gamma\}$	$\alpha(\gamma)$	Примечания
B_l	$\lambda_1, \ldots, \lambda_{l-1}$	λ_l	
C_l	$\lambda_1+\lambda_2, \ldots, \lambda_{l-1}+\lambda_l$	$\alpha(\lambda_i+\lambda_{i+1})=\lambda_i-\lambda_{i+1}$	
F_4	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3;\ \lambda-\lambda_2,\ \lambda-\lambda_3,$ $\lambda-\lambda_4$	$\alpha(\lambda_i)=\lambda_4,\ \alpha(\lambda-\lambda_i)=$ $=\lambda_1-\lambda$	$\lambda=\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)$
G_2	$\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_1+2\alpha_2$	α_2	$\{\alpha_1, \alpha_2\}=\Pi(G_2)$

3°. В последнем пункте статьи ([1]) было отмечено, что некоторые из изложенных в ней результатов справедливы для несколько более общего вида пространств, чем симметрические. Опишем эти пространства.

Пусть G — компактная группа Ли, K — ее замкнутая подгруппа. Мы будем говорить, что для однородного пространства G/K имеет место аналог разложения Ивасава, и называть пространство G/K квазисимметрическим, если существует такой выбор подалгебры Картана $\mathfrak{h}$ в алгебре $\mathfrak{g}$ и упорядочения в системе корней, что для любого вектора $x\in\mathfrak{g}_+$ существуют такие векторы $y\in\mathfrak{k}$ и $z\in\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{g}_-$, что $x=y+z$. Ясно, что каждое симметрическое пространство является квазисимметрическим.

Предложение. *Пусть K/M — орбита общего положения подгруппы K в окрестности полюса $o=\{K\}\in G/K$.*

Тогда, если однородное пространство G/K является квазисимметрическим, то выполняется равенство

$$\dim G/K-\dim K/M=\operatorname{rang} G-\operatorname{rang} M.$$

Имеет место следующая

Теорема. *Пусть G/K — квазисимметрическое однородное пространство. Выберем в алгебре $\mathfrak{g}$ подалгебру Картана $\mathfrak{h}$ и упорядочение в системе корней так, чтобы выполнялся аналог разложения Ивасава. Тогда:*

1) *Для любого неприводимого представления группы G со старшим весом λ*

$$U(\mathfrak{t})\,v_\lambda = V_\lambda,$$

где $U(\mathfrak{k})$ — универсальная обертывающая алгебра подалгебры $\mathfrak{k}$, v_λ — старший вектор G-модуля V_λ.

Таблица 3

Множество весов $\{\Lambda_1,\dots,\Lambda_n\}$ для представления в векторных полях на симметрических пространствах ранга 1 (кроме сфер)

G/K	$n=\dim W$	$\Lambda_1,\dots,\Lambda_n$
$P^2(\mathbf{C})$	4	$\Lambda_1=\Lambda_2=\overset{1}{\circ}-\overset{1}{\circ}$, $\Lambda_3=\circ-\overset{3}{\circ}$, $\Lambda_4=\Lambda_3=\overset{3}{\circ}-\circ$
$P^m(\mathbf{C}), m\geq 3$	4	$\Lambda_1=\Lambda_2=\overset{1}{\circ}-\bullet\cdots\bullet-\overset{1}{\circ}$, $\Lambda_3=\circ-\overset{1}{\bullet}\cdots\bullet-\overset{2}{\circ}$, $\Lambda_4=\hat{\Lambda}_3$
$P^m(\mathbf{H}), m\geq 2$	3	$\Lambda_1=\bullet-\overset{1}{\circ}-\bullet\cdots\bullet\Leftarrow\bullet$, $\Lambda_2=\overset{2}{\bullet}-\circ-\bullet\cdots\bullet\Leftarrow\bullet$, $\Lambda_3=\overset{1}{\bullet}-\circ-\overset{1}{\bullet}\cdots\bullet\Leftarrow\bullet$
$P^2(\mathbf{O})$	3	$\Lambda_1=\bullet-\bullet\Rightarrow\bullet-\overset{1}{\circ}$ $\Lambda_2=\overset{1}{\bullet}-\bullet\Rightarrow\bullet-\circ$, $\Lambda_3=\bullet-\bullet\Rightarrow\overset{1}{\bullet}-\circ$

Таблица 4

Множество весов $\{\Lambda_1,\dots,\Lambda_n\}$ для представления в векторных полях на некоторых квазисимметрических пространствах

G/K	G	n	$\Lambda_1,\dots,\Lambda_n$
S^5	$SU(3)$	5	$\Lambda_1=\circ-\circ$, $\Lambda_2=\Lambda_5=\overset{1}{\circ}-\circ$, $\Lambda_3=\Lambda_4=\circ-\overset{1}{\circ}$
$S^{2m+1}, m\geq 3$	$SU(m+1)$	5	$\Lambda_1=\circ-\bullet\cdots\bullet-\circ$, $\Lambda_2=\hat{\Lambda}_3=\overset{1}{\circ}-\bullet\cdots\bullet-\circ$, $\Lambda_4=\hat{\Lambda}_5=\circ-\overset{1}{\bullet}\cdots\bullet-\circ$
S^7	Spin(7)	3	$\Lambda_1=\bullet-\bullet\Rightarrow\overset{1}{\circ}$, $\Lambda_2=\bullet-\overset{1}{\bullet}\Rightarrow\circ$, $\Lambda_3=\overset{1}{\bullet}-\bullet\Rightarrow\circ$
S^{15}	Spin(9)	7	$\Lambda_1=\overset{1}{\circ}-\bullet-\bullet\Rightarrow\circ$, $\Lambda_2=\Lambda_5=\circ-\bullet-\bullet\Rightarrow\overset{1}{\circ}$ $\Lambda_3=\Lambda_6=\circ-\overset{1}{\bullet}-\bullet\Rightarrow\circ$, $\Lambda_4=\Lambda_7=\circ-\bullet-\overset{1}{\bullet}\Rightarrow\circ$
$P^{2m+1}(\mathbf{C}), m\geq 2$	$Sp(m+1)$	8	$\Lambda_{1,2,3,4}=\overset{2}{\circ}-\circ-\bullet\cdots\bullet\Leftarrow\bullet$, $\Lambda_{5,6}=\circ-\overset{1}{\circ}-\bullet\cdots\bullet\Leftarrow\bullet$, $\Lambda_{7,8}=\overset{1}{\circ}-\circ-\overset{1}{\bullet}\cdots\bullet\Leftarrow\bullet$

2) *Существует p старших весов $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ группы G, где $p=\operatorname{rang} G-\operatorname{rang} M$, что*

$$\bar{I}(0)=\left\{\sum_{i=1} a_i\lambda_i,\ a_i\in\mathbf{Z},\ a_i\geqslant 0\right\}.$$

3) *Для любого представления φ подгруппы K в векторном пространстве V существует такой набор старших весов $\Lambda_1,\dots,\Lambda_n$ группы G, что множество*

$$\bar{I}(\varphi)=\bigcup_{i=1}^{n}\{\Lambda_i+\lambda,\ \lambda\in\bar{I}(0)\}$$

содержит спектр $I(\varphi)$ индуцированного представления, причем если

$$V=V_{\nu_1}+\dots+V_{\nu_k},$$

$k=k(\varphi)$, — разложение K-модуля V на неприводимые M-модули, то $k(\varphi)=n(\varphi)$, причем веса $\{\Lambda_1,\dots,\Lambda_n\}$ можно занумеровать таким образом,

что для каждого i будет выполняться равенство

$$\Lambda_i|_{\mathfrak{h}} = \nu_i.$$

В табл. 4 для некоторых квазисимметрических пространств, не являющихся симметрическими, приведены веса $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ такие, что множество $\bigcup_i \{\Lambda_i+\lambda,\ \lambda \in I(0)\}$ является спектром представления в векторных полях. Эти веса вычислены с помощью теоремы Желобенко ([3]) и сформулированной выше теоремы.

Институт кибернетики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
18 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ю. В. Дзядык*, ДАН, 220, № 5 (1975). [2] *А. А. Кириллов*, ДАН, т. 116, № 4, 538 (1957). [3] *Д. П. Желобенко*, УМН, т. 17 (1962).