Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 1

УДК 517.945

МАТЕМАТИКА

С. Н. КРУЖКОВ, П. А. АНДРЕЯНОВ

К НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В КЛАССЕ ЛОКАЛЬНО СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 17 VI 1974)

В настоящей работе изучается задача Коши для квазилинейных уравнений вида

$$u_t+(\varphi_i(u))_{x_i}=0 \tag{1}$$

с начальным условием

$$u|_{t=0}=u_0(x), \quad x=(x_1,\ldots,x_n)\in E_n, \tag{2}$$

при помощи методов, предложенных в работах ([1, 2]) и развитых в работе ([3]) (в (1) подразумевается суммирование по i от 1 до n).

Обобщенное решение задачи (1), (2) рассматривается в классе локально суммируемых в слое $\Pi_T=[0,T]\times E_n$ функций; здесь E_n — n-мерное эвклидово пространство. В этом классе задача (1), (2) изучалась в работе ([4]) в предположении равномерной ограниченности на всей прямой функций $\varphi_i'(u)$; это предположение обеспечивает выполнение свойства конечности области зависимости решения от начальных данных при любой локально суммируемой функции $u_0(x)$. В работах ([3], [5], [6]) эта задача рассматривалась в классе функций $u(t,x)$, суммируемых по всему пространству E_n на сечениях $t=\text{const}$, в случае, когда область зависимости решения от начальных данных бесконечна, а начальная функция суммируема в E_n (и, следовательно, непрерывна по метрике $L_1(E_n)$).

В настоящей статье задача (1), (2) также исследуется в том случае, когда область зависимости решения от начальных данных бесконечна (как вследствие неограниченности начальной функции, так и вследствие негладкости функций $\varphi_i(u)$). Предполагаем, что начальная функция $u_0(x)$ представима в виде

$$u_0(x)=z_0(x)+w_0(x), \tag{3}$$

где $z_0(x)$ — фиксированная ограниченная измеримая в E_n функция, а $w_0(x)$ — произвольная суммируемая в E_n функция; такая структура начальной функции существенно используется в самом подходе к определению обобщенного решения задачи (1), (2).

В первой части статьи рассматривается случай, когда начальная функция $u_0(x)$ (в отличие от предположений работ ([3], [5], [6])) не обладает модулем непрерывности в $L_1(E_n)$. Однако здесь мы предполагаем гладкость функций $\varphi_i(u)$. Во второй части функции $\varphi_i(u)$ считаем лишь непрерывными; функция $u_0(x)$ в этом случае уже обладает модулем непрерывности в $L_1(E_n)$, но (в отличие от предположений работ ([3], [5], [6])) не является суммируемой в E_n.

1. Случай гладких функций $\varphi_i(u)$. Будем предполагать здесь, что функции $\varphi_i(u)$ непрерывно дифференцируемы на всей прямой и что

$$|\varphi_i(u)|\leqslant \text{const}\,(|u|+1) \tag{4}$$

для любых $-\infty<u<+\infty$.

Определение. Локально суммируемая в Π_T функция $u(t,x)$ называется обобщенным решением задачи (1), (2), если:

1) для любой неотрицательной функции $f(t,x)\in C_0^\infty(\Pi_T)$ и любой константы k выполняется неравенство

$$\iint_{\Pi_T}\{|u(t\ x)-k|f_t+\operatorname{sign}(u(t,x)-k)\,[\varphi_i(u(t,x))-\varphi_i(k)]f_{x_i}\}dx\,dt\geqslant 0, \quad (5)$$

2) существует фиксированная ограниченная измеримая в Π_T функция $z(t,x)$ (определяемая функцией $z_0(x)$ и не зависящая от выбора функции $w_0(x)$ из (3)) такая, что

$$\iint_{\Pi_T}|u(t,x)-z(t,x)|\,dx\,dt<+\infty, \quad (6)$$

3) существует множество нулевой меры $\mathscr{E}\subset[0,T]$ такое, что при $t\in[0,T]\diagdown\mathscr{E}$ функция $u(t,x)$ определена почти всюду в E_n и что для любого шара $K_r=\{|x|\leqslant r\}\subset E_n$

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\in[0,T]\diagdown\mathscr{E}}}\int_{K_r}|u(t,x)-u_0(x)|\,dx=0. \quad (7)$$

Теорема 1. *Пусть функции* $u(t,x)$ *и* $v(t,x)$ *являются обобщенными решениями задачи* (1), (2) *с начальными функциями* $u_0(x)$ *и* $v_0(x)$ *соответственно. Тогда для почти всех* $t\in[0,T]$

$$\int_{E_n}|u(t,x)-v(t,x)|\,dx\leqslant\int_{E_n}|u_0(x)-v_0(x)|\,dx. \quad (8)$$

Теорема 2. *Обобщенное решение задачи* (1), (2) *существует.*

Доказательство. В случае ограниченной измеримой начальной функции $u_0(x)$ нелокальная теория задачи Коши для уравнения (1) построена в ([1], [2]). Обозначим через $z(t,x)$ обобщенное решение задачи Коши для уравнения (1) с ограниченной (и фиксированной) начальной функцией $z_0(x)$. Если функция $w_0(x)$ (а, следовательно, и $u_0(x)$) ограничена, то исследуемое обобщенное решение задачи (1), (2) совпадает с решением этой задачи, построенным в ([1], [2]); для функций $u(t,x)$ и $z(t,x)$ вследствие теоремы 1 из ([2]) для почти всех $t\in[0,T]$ справедлива оценка

$$\int_{E_n}|u(t,x)-z(t,x)|\,dx\leqslant\int_{E_n}|u_0(x)-z_0(x)|\,dx=\int_{E_n}|w_0(x)|\,dx, \quad (9)$$

из которой вытекает, что функция $u(t,x)$ удовлетворяет требованию 2 определения (выполнение других требований очевидно).

Для построения решения задачи (1), (2) в случае произвольной суммируемой функции $w_0(x)$ из (3) положим $u_0^N(x)=z_0(x)+w_0^N(x)$, где для $N=1,2,3,\ldots$

$$w_0^N(x)=\begin{cases} N & \text{при}\quad w_0(x)>N,\\ w_0(x) & \text{при}\quad |w_0(x)|\leqslant N,\\ -N & \text{при}\quad w_0(x)<-N.\end{cases}$$

Пусть $u^N(t,x)$ — обобщенное решение задачи (1), (2) с начальной функцией $u_0^N(x)$. Для $t\in[0,T]\diagdown\mathscr{E}_0$ ($\operatorname{mes}\mathscr{E}_0=0$) имеем оценку

$$\int_{K_r}|u^{N''}(t,x)-u^{N'}(t,x)|\,dx\leqslant\int_{E_n}|w_0^{N''}(x)-w_0^{N'}(x)|\,dx\leqslant 2\int_{e(N',N'')}|w_0(x)|\,dx,$$

где $e(N',N'')=\{x\colon |w_0(x)|>N'\}\cup\{x\colon |w_0(x)|>N''\}$. Последний интеграл стремится к нулю при $N',N''\to+\infty$ в силу суммируемости функции $w_0(x)$. Отсюда вытекает, что $u^N(t,x)$ сходится при $N\to+\infty$ по норме $L_1(K_r)$ к некоторой суммируемой на любом компакте в Π_T функции $u(t,x)$, причем при $t\in[0,T]\diagdown\mathscr{E}_0$ справедлива оценка

$$\int_{K_r}|u^N(t,x)-u(t,x)|\,dx\leqslant\int_{E_n}|u_0^N(x)-u_0(x)|\,dx.$$

Покажем, что $u(t,x)$ — искомое решение задачи (1), (2). Переходя к пределу при $N\to+\infty$ в неравенстве (5) для $u^N(t,x)$ (здесь существенно используется условие (4)), получаем, что для функции $u(t,x)$ выполняется первое требование из определения решения. Предельный переход в оценке (9), записанной для решения $u^N(t,x)$, обеспечивает выполнение второго требования.

Далее, пусть $\mathscr{E}_N$ — множества меры нуль из (7), соответствующие решениям $u^N(t,x)$. Положим $\mathscr{E}^*=\bigcup\limits_{N=0}^{+\infty}\mathscr{E}_N$ (очевидно, $\operatorname{mes}\mathscr{E}^*=0$). При $t\in[0,T]\setminus\mathscr{E}^*$ функция $u(t,x)$ определена почти всюду в E_n и для любого шара $K_r\subset E_n$

$$\int\limits_{K_r}|u(t,x)-u_0(x)|\,dx\leqslant\int\limits_{K_r}|u^N(t,x)-u_0^N(x)|\,dx+2\int\limits_{E_n}|u_0^N(x)-u_0(x)|\,dx=I_1+I_2.$$

Для любого $\varepsilon>0$ сначала выберем N_0 так, чтобы при $N=N_0$ и любых $t\in[0,T]\setminus\mathscr{E}^*$ выполнялось неравенство $I_2<\varepsilon/2$. Затем выберем t_0 столь малым, чтобы при $N=N_0$ и любых $t\leqslant t_0$, $t\in[0,T]\setminus\mathscr{E}^*$, была справедлива оценка $I_1<\varepsilon/2$. Отсюда вытекает, что функция $u(t,x)$ удовлетворяет третьему требованию из определения решения.

2. Случай непрерывных функций $\varphi_i(u)$. Под обобщенным решением задачи (1), (2) будем понимать здесь функцию $u(t,x)$ в смысле определения, данного в п. 1.

Теорема 3. *Пусть при $n>1$ существует непрерывная выпуклая книзу функция $\Phi(\sigma)\geqslant0$, определенная при $\sigma\geqslant0$, $\Phi(0)=0$, и такая, что*

$$\int\limits_0\sigma^{(1-2n)/(n-1)}\Phi(\sigma)\,d\sigma=+\infty,\tag{10}$$

$$\Phi(|\varphi_i(u)-\varphi_i(z)|)\leqslant|u-z|\tag{11}$$

для любых $-\infty<u<+\infty$ и $z\in[m,M]$, $m=\operatorname{vrai}\min\limits_{E_n}z_0(x)$, $M=\operatorname{vrai}\max\limits_{E_n}z_0(x)$; пусть при $n=1$ выполняется условие (4).

Тогда, если функции $u(t,x)$ и $v(t,x)$ являются обобщенными решениями задачи (1), (2) *с начальными функциями $u_0(x)$ и $v_0(x)$ соответственно, то для почти всех $t\in[0,T]$ справедлива оценка* (8).

Доказательство. Из неравенства (5), так же как и в [3], выводим неравенство

$$\iint\limits_{\Pi_T}\{|u(t,x)-v(t,x)|f_t+\operatorname{sign}(u(t,x)-v(t,x))\times$$
$$\times[\varphi_i(u(t,x))-\varphi_i(v(t,x))]f_{x_i}\}\,dx\,dt\geqslant0,\tag{12}$$

выполняющееся для любой неотрицательной функции $f(t,x)\in C_0^\infty(\Pi_T)$. Пусть $\delta(\sigma)$ — бесконечно дифференцируемая функция на прямой $-\infty<\sigma<+\infty$, $\delta(\sigma)\equiv0$ при $|\sigma|\geqslant1$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(\sigma)\,d\sigma=1$,

$$\delta_\nu(\sigma)=\nu\delta(\nu\sigma),\quad \nu=1,2,3,\ldots,\quad \alpha_\nu(\sigma)=\int\limits_{-\infty}^{\sigma}\delta_\nu(\sigma)\,d\sigma.$$

Для $\rho,\tau\in[0,T]$, $\rho<\tau$, $r>0$ положим в (12)

$$f(t,x)=[\alpha_\nu(t-\rho)-\alpha_\nu(t-\tau)][1-\alpha_m(|x|-r)]$$

и устремим затем m к $+\infty$. В силу условия (11) для почти всех $r>0$ будем иметь, определив $H(\sigma)\equiv\Phi^{-1}(\sigma)$:

$$\int\limits_0^T\int\limits_{K_r}[\delta_\nu(t-\tau)-\delta_\nu(t-\rho)]|u-v|dx\,dt\leqslant\sum_{i=1}^n\int\limits_0^T\int\limits_{|x|=r}[|\varphi_i(n)-\varphi_i(z)|+$$

$$+|\varphi_i(v)-\varphi_i(z)|]dS\,dt\leqslant n\int\limits_0^T\int\limits_{|x|=r}[H(|u-z|)+H(|v-z|)]dS\,dt=I(r). \quad (13)$$

Далее, применяя неравенство

$$\Phi\left(\frac{1}{\operatorname{mes}\Omega}\int\limits_\Omega|f|d\Omega\right)\leqslant\frac{1}{\operatorname{mes}\Omega}\int\limits_\Omega\Phi(|f|)\,d\Omega,$$

справедливое для любой непрерывной выпуклой книзу функции $\Phi(\sigma)$ на $[0,+\infty)$ (см. ([7])), получаем, что

$$I(r)\leqslant ncr^{n-1}H\left(\frac{1}{cr^{n-1}}\int\limits_0^T\int\limits_{|x|=r}[|u-z|+|v-z|]dS\,dt\right),$$

где $c=c(n)>0$ — некоторая константа. Отсюда с учетом требований (6), (10) заключаем, что $I(r)\to0$ по некоторой последовательности $r=r_k\to+\infty$. Последовательно переходя в (13) к пределам при $\nu\to+\infty$, $\rho\to0$ и, наконец, при $r=r_k\to+\infty$, получаем оценку (8).

В случае $n=1$ доказательство отличается лишь способом оценки в (13) интегралов вида

$$J(r)=\int\limits_0^T|\varphi_1(u)-\varphi_1(z)|\,\Big|_{|x|=r}dt.$$

Воспользуемся неравенством (вытекающим из непрерывности $\varphi_1(u)$ при условии (4))

$$|\varphi_1(u)-\varphi_1(z)|\leqslant\varepsilon+C(\varepsilon)\,|u-z|,$$

выполняющимся для любого $\varepsilon>0$, $-\infty<u<+\infty$, $z\in[m,M]$. Учитывая условие (6), заключаем, что

$$J(r_k)\leqslant\min_{\varepsilon>0}\left\{\varepsilon T+C(\varepsilon)\int\limits_0^T|u-z|\,\Big|_{|x|=r_k}dt\right\}\to0$$

по некоторой последовательности $r=r_k\to+\infty$.

Теорема существования решения задачи (1), (2) справедлива при следующих предположениях: 1) непрерывные функции $\varphi_i(u)$ удовлетворяют условию (4); 2) для любого вектора $\Delta x\in E_n$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{E_n}|z_0(x+\Delta x)-z_0(x)|\,dx\leqslant\omega(|\Delta x|), \quad (14)$$

где $\omega(\sigma)\geqslant0$ — непрерывная при $\sigma\geqslant0$ функция, $\omega(0)=0$.

Замечание 1. В п. 1 требование гладкости функций $\varphi_i(u)$ можно заменить на условие Липшица.

Замечание 2. В п.п. 1, 2 можно доказать теоремы сравнения для решений задачи (1), (2): если $u_0(x)\leqslant v_0(x)$ почти всюду в E_n, то $u(t,x)\leqslant\leqslant v(t,x)$ почти всюду в Π_T (см. ([3])).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
16 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *С. Н. Кружков*, ДАН, т. 187, № 1, 29 (1969). [2] *С. Н. Кружков*, Матем. сб., т. 81, № 2, 217 (1970). [3] *С. Н. Кружков, Ф. Хильдебранд*, Вест. Московск. унив., № 1, 93 (1974). [4] *П. А. Андреянов*, Там же, № 6, 42 (1971). [5] *M. G. Crandall*, MRC Technical Summary, Report, 1196, Madison, Wisconsin, 1972. [6] *Ph. Benilan*, Equation d'evolution dans un space de Banach quelconque et applications, Thèse de Doctorat d'Etat, centre d'Orsey, Université de Paris-Sud., 1972. [7] *Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд, Г. Полиа*, Неравенства, ИЛ, 1948.