Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 1

УДК 539.12:530.145 *МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА*

Б. А. ЛЕВИТСКИЙ, В. М. МОСТЕПАНЕНКО, В. М. ФРОЛОВ

СВОЙСТВА БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ РАЗЛОЖЕНИЙ, ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ $O(4)$

(Представлено академиком В. А. Фоком 19 VI 1974)

1. В ряде задач квантовой теории важную роль играют базисные функции со спином 0 и $^1/_2$ унитарных представлений ортогональной группы $O(4)$. Метрика на трехмерной сфере в сферической системе координат, соответствующей редукции $O(4)\supset O(3)\supset O(2)$, есть

$$h_{ik}dx^i dx^k = d\beta^2+\sin^2\beta\,(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2), \tag{1}$$

где $0\leqslant\beta\leqslant\pi$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $0\leqslant\varphi<2\pi$, $i, k=1, 2, 3$.

Базисные функции со спином 0 использовались В. А. Фоком [1] при решении задачи об атоме водорода в импульсном представлении. Аналогичные функции, соответствующие группе $O(3, 1)$, были применены в [2] для получения интегральных представлений релятивистских амплитуд рассеяния.

В данной работе установлен ряд свойств базисных функций со спином 0 и $^1/_2$ для группы $O(4)$. Эти свойства являются, очевидно, и свойствами представлений группы Лоренца. Например, переход к конечномерным представлениям группы Лоренца осуществляется с помощью замены $\beta\to i\beta$ [3]. Полученные ниже формулы находят также применение при изучении эффектов квантовой теории поля в римановом пространстве-времени (см., например, [4–6]).

2. В качестве ортонормированного базиса для случая нулевого спина выбираем набор 4-мерных шаровых функций [1]:

$$\varphi_{nlm}(\beta,\theta,\varphi)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\sin\beta}}\sqrt{\frac{(n+1)\,(n+l+1)\,!}{(n-l)\,!}}\,P_{n+{1/2}}^{-l-{1/2}}(\cos\beta)\,Y_{lm}(\theta,\varphi)\equiv F_n^{\,l}(\beta)\,Y_{lm}(\theta,\varphi), \tag{2}$$

где $-n(n+2)$ — собственное значение оператора Лапласа на сфере, $n=0, 1, 2,\ldots, l=0, 1,\ldots, n, -l\leqslant m\leqslant l$.

Используя условия ортонормированности и известные соотношения для сферических функций Y_{lm}, получаем равенство

$$\int\left(\frac{\partial\overline{Y}_{lm}}{\partial\theta}\frac{\partial Y_{l'm'}}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial\overline{Y}_{lm}}{\partial\varphi}\frac{\partial Y_{l'm'}}{\partial\varphi}\right)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=l(l+1)\,\delta_{ll'}\delta_{mm'}. \tag{3}$$

С помощью (3), а также свойств присоединенных функций Лежандра [7] имеем

$$\int h^{ik}\frac{\partial\varphi_{nlm}}{\partial x^i}\frac{\partial\overline{\varphi}_{n'l'm'}}{\partial x^k}d\sigma=n\,(n+2)\,\delta_{nn'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}, \tag{4}$$

где $d\sigma\equiv\sin^2\beta\,\sin\theta\,d\beta\,d\theta\,d\varphi$.

Из результатов [8] можно вывести следующую теорему сложения:

$$C_n^1(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\chi)=$$

$$=\sum_{l=0}\frac{\pi(2l+1)(n+l+1)!}{2(n-l)!}\frac{1}{\sqrt{\sin\theta_1\sin\theta_2}}P_{n+1/2}^{-l-1/2}(\cos\theta_1)P_{n+1/2}^{-l-1/2}(\cos\theta_2)P_l(\cos\chi), \tag{5}$$

где C_n^1 — полином Гегенбауэра.

Применяя (5) и известные свойства функций Y_{lm}, получим

$$\sum_{l,m}|\varphi_{nlm}|^2=\frac{(n+1)^2}{2\pi^2}. \tag{6}$$

Легко убедиться также в справедливости соотношений

$$\sum_{m=-l}^{l}\frac{\partial\varphi_{nlm}}{\partial x^i}\frac{\partial\bar{\varphi}_{nlm}}{\partial x^k}=0,\qquad i\neq k. \tag{7}$$

Действуя оператором Лапласа на обе части (6), получаем формулу

$$\sum_{l,m}h^{ik}\frac{\partial\varphi_{nlm}}{\partial x^i}\frac{\partial\bar{\varphi}_{nlm}}{\partial x^k}=\frac{n(n+2)(n+1)^2}{2\pi^2}. \tag{8}$$

Если продифференцировать (5) по $\cos\chi$ и положить $\chi=0$, $\theta_1=\theta_2=\beta$, то можно убедиться в том, что

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l(l+1)(2l+1)(n+l+1)!}{4\sin^3\beta(n-l)!}[P_{n+1/2}^{-l-1/2}(\cos\beta)]^2=\frac{n(n+1)(n+2)}{3\pi}. \tag{9}$$

С учетом (9), (8), а также легко проверяемых соотношений

$$\sum_{m=-l}^{l}\frac{m^2}{\sin^2\theta}|Y_{lm}|^2=\sum_{m=-l}^{l}\left|\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta}\right|^2=\frac{l(l+1)(2l+1)}{8\pi} \tag{10}$$

заключаем, что

$$\sum_{m,l}\left|\frac{\partial\varphi_{nlm}}{\partial\beta}\right|^2=\frac{1}{\sin^2\beta}\sum_{l,m}\left|\frac{\partial\varphi_{nlm}}{\partial\theta}\right|^2=$$

$$=\frac{1}{\sin^2\beta\sin^2\theta}\sum_{l,m}\left|\frac{\partial\varphi_{nlm}}{\partial\varphi}\right|^2=\frac{n(n+2)(n+1)^2}{6\pi^2}. \tag{11}$$

Таким образом, свойства функций φ_{nlm} даются равенствами (4), (6)–(8), (11).

3. В качестве базиса для случая спина $^1/_2$ выбираем решение системы уравнений

$$\begin{aligned}&\mathbf{S}^2\Psi_{sjlM}(\beta,\theta,\varphi)=Q\Psi_{sjlM}(\beta,\theta,\varphi),\\&\mathbf{J}^2\Psi_{sjlM}(\beta,\theta,\varphi)=j(j+1)\Psi_{sjlM}(\beta,\theta,\varphi),\\&J_3\Psi_{sjlM}(\beta,\theta,\varphi)=M\Psi_{sjlM}(\beta,\theta,\varphi),\end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\mathbf{S}=\mathbf{N}+{}^1/_2\boldsymbol{\Sigma},\quad \mathbf{J}=\mathbf{L}+{}^1/_2\boldsymbol{\sigma},\quad \mathbf{N}=(L^{14},L^{24},L^{34},L^{23},L^{13},L^{12}),$$

$L^{\alpha\beta}$ — генераторы вращений 4-мерного эвклидова пространства

$$i\boldsymbol{\Sigma}=(\alpha_1\alpha_4,\ \alpha_2\alpha_4,\ \alpha_3\alpha_4,\ \alpha_2\alpha_3,\ \alpha_1\alpha_3,\ \alpha_1\alpha_2),$$
$$\mathbf{L}=(L^{23}, L^{13}, L^{12}), \qquad i\boldsymbol{\sigma}=(\alpha_2\alpha_3,\ \alpha_1\alpha_3,\ \alpha_1\alpha_2),$$

$$\alpha_0=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \alpha_i=\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_4=i\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

I — единичная матрица 2×2, σ_i — матрицы Паули.

Собственные значения в уравнениях (12) суть

$$Q=S(S+2)+{}^1/_4, \qquad S={}^1/_2,\ {}^3/_2,\ {}^5/_2,\ldots,$$
$$j={}^1/_2,\ {}^3/_2,\ {}^5/_2,\ldots,\ S, \qquad l=j\pm{}^1/_2, \qquad -j\leqslant M\leqslant j.$$

Ортонормированный набор решений (12), являющихся также собственными функциями оператора четности, выписан в [5]. Он может быть представлен в виде

$$\Psi_{SjlM}(\beta,\ \theta,\ \varphi)=UV_{Sjl}(\beta)Z_{jlM}(\theta,\ \varphi), \tag{13}$$

$$U=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & iI \\ I & -iI \end{pmatrix}, \qquad V_{Sjj+1/2}(\beta)=\begin{pmatrix} \bar{f}_{Sj}(\beta)I & 0 \\ 0 & k_{Sj}(\beta)I \end{pmatrix}$$

$$V_{Sjj-1/2}(\beta)=\begin{pmatrix} \bar{k}_{Sj}(\beta)I & 0 \\ 0 & f_{Sj}(\beta)I \end{pmatrix},$$

$$f_{Sj}(\beta)=\sqrt{\frac{S+j+2}{2S+3}}F^{j+1/2}_{S+1/2}(\beta)+i\sqrt{\frac{S-j}{2S+1}}F^{j+1/2}_{S-1/2}(\beta),$$

$$k_{Sj}(\beta)=\sqrt{\frac{S-j+1}{2S+3}}F^{j-1/2}_{S+1/2}(\beta)+i\sqrt{\frac{S+j+1}{2S+1}}F^{j-1/2}_{S-1/2}(\beta),$$

$$Z_{jlM}(\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i^{l-l'+1}\Omega_{jlM}(\theta,\varphi) \\ \Omega_{jl'M}(\theta,\varphi) \end{pmatrix}, \qquad l=j\pm{}^1/_2, \qquad l'=j\mp{}^1/_2.$$

Здесь Ω_{jlM} — ортонормированная система шаровых спиноров [9]. Функции (13) являются аналогами функций В. А. Фока (2) для случая спина ${}^1/_2$.

Используя (3), (5), (10), можно убедиться в том, что имеют место равенства

$$\int\left(\frac{\partial\overset{+}{\Omega}_{jlM}}{\partial\theta}\frac{\partial\Omega_{j'l'M'}}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial\overset{+}{\Omega}_{jlM}}{\partial\varphi}\frac{\partial\Omega_{j'l'M'}}{\partial\varphi}\right)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=l(l+1)\delta_{jj'}\delta_{ll'}\delta_{MM'},$$

$$\sum_{M=-j}^{j}\overset{+}{\Omega}_{jlM}\Omega_{jlM}=\frac{j+{}^1/_2}{2\pi}, \tag{14}$$

$$\sum_{M=-j}^{j}\frac{\partial\Omega_{jlM}}{\partial\theta}\frac{\partial\Omega_{jlM}}{\partial\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}\sum_{M=-j}^{j}\frac{\partial\overset{+}{\Omega}_{jlM}}{\partial\varphi}\frac{\partial\Omega_{jlM}}{\partial\varphi}=\frac{(j+{}^1/_2)l(l+1)}{4\pi}.$$

С учетом равенств (14), (5), (9), а также формулы

$$\sum_{l=0}^{n}(2l+1)\left[\frac{dF_n{}^l(\beta)}{d\beta}\right]^2=\frac{2n(n+2)(n+1)^2}{3\pi}$$

которая получается, если продифференцировать (5) по θ_1, θ_2 и затем положить $\chi=0$, $\theta_1=\theta_2=\beta$, приходим, аналогично соответствующим выводам п. 2, к следующим результатам:

$$h^{ik}\frac{\partial\Psi_{SjlM}}{\partial x^i}\frac{\partial\Psi_{S'j'l'M'}}{\partial x^k}d\sigma=[S(S+2)+{}^1/_4]\delta_{SS'}\delta_{jj'}\delta_{ll'}\delta_{MM'},$$

$$\sum_{j,l,M}\overset{+}{\Psi}_{SjlM}\Psi_{SjlM}=\frac{(S+{}^1/_2)(S+{}^3/_2)}{\pi^2},$$

$$\sum_{l,M}\frac{\partial\overset{+}{\Psi}_{SjlM}}{\partial x^i}\frac{\partial\Psi_{SjlM}}{\partial x^k}=0,\qquad i\neq k, \tag{15}$$

$$\sum_{j,l,M}\frac{\partial\overset{+}{\Psi}_{SjlM}}{\partial\beta}\frac{\partial\Psi_{SjlM}}{\partial\beta}=\frac{1}{\sin^2\beta}\sum_{j,l,M}\frac{\partial\overset{+}{\Psi}_{SjlM}}{\partial\theta}\frac{\partial\Psi_{SjlM}}{\partial\theta}=$$

$$=\frac{1}{\sin^2\beta\sin^2\theta}\sum_{j,l,M}\frac{\partial\overset{+}{\Psi}_{SjlM}}{\partial\varphi}\frac{\partial\Psi_{SjlM}}{\partial\varphi}=\frac{[S(S+2)+{}^1/_4](S+{}^1/_2)(S+{}^3/_2)}{3\pi^2}.$$

Установленные результаты (4), (6)—(8), (11), (15) могут быть использованы в ряде задач математической физики, допускающих симметрию относительно группы $O(4)$.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
15 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. А. Фок,* Изв. АН СССР, отд. матем. и естеств. наук, т. 7, № 2, 169 (1935). [2] *Н. Я. Виленкин, Я. А. Смородинский,* ЖЭТФ, т. 46, № 5, 1793 (1964). [3] *А. З. Долгинов,* ЖЭТФ, т. 30, № 4, 746 (1956). [4] *N. A. Chernikov, E. A. Tagirov,* Ann. Inst. Henri Poincaré, v. 9A, № 2, 109 (1968). [5] *Б. А. Левитский,* Вестн. Ленингр. унив., № 4, 7 (1973). [6] *А. А. Гриб, Б. А. Левитский, В. М. Мостепаненко,* Теоретич. и матем. физ., т. 19, № 1, 59 (1974). [7] *Г. Бейтмен, А. Эрдейи,* Высшие трансцендентные функции, т. 1, «Наука», 1973. [8] *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик,* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, «Наука», 1971. [9] *А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий,* Квантовая электродинамика, «Наука», 1969.