Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 1

УДК 513.83 *МАТЕМАТИКА*

В. И. МАЛЫХИН

ЭКСТРЕМАЛЬНО-НЕСВЯЗНЫЕ И БЛИЗКИЕ К НИМ ГРУППЫ

(Представлено академиком П. С. Александровым 18 VI 1974)

До сих пор был известен единственный (по существу) пример экстремально-несвязной группы *: экстремально-несвязная топология была сконструирована в 1967 г. С. Сиротой в предположении CH на счетной абелевой группе, всякий элемент которой имел порядок 2 ([1]).

Теорема 2 нашей работы показывает, что экстремально-несвязные группы устроены довольно жестко: всякая такая группа имеет открытую абелеву подгруппу из элементов второго порядка (таким образом, сейчас видно, что выбор С. Сиротой алгебраической группы, для которой можно было надеяться найти экстремально-несвязную топологию, и не мог быть иным). В приводимой далее теореме 3 дается значительное усиление примера С. Сироты (а также недавних результатов автора ([2])): на той же алгебраической группе, что и у С. Сироты, строится в дополнительном предположении, совместимом с аксиомами системы ZF, групповая топология, являющаяся максимальной (определения см. ниже).

Напомним некоторые определения и обозначения. Плотное в себе пространство (X, τ) называется максимальным ([3-5]) (а топология τ — максимальной), если всякое уплотнение f: $(X, \tau') \to (X, \tau)$ есть гомеоморфизм.

Нам потребуется следующий критерий максимальности пространства (X, τ), легко получающийся из других критериев максимальности, равносильных, естественно, одно другому (см. ([3-5])).

$(*)$ Если $X_1 \cap X_2 = \Lambda$ и $x \notin X_1 \cup X_2$, то точка x может принадлежать замыканию лишь одного из множеств X_1, X_2.

Таким образом, если в топологической группе (M, τ) условие $(*)$ выполнено для нейтрального элемента, то топология τ максимальна.

Теорема 1. *Всякая экстремально-несвязная группа M есть объединение трех дизъюнктных открыто-замкнутых подмножеств M^+, M^-, $\mathring{M}$, где $\mathring{M} = \{x \in M\colon x^2 = 1\}$, а $M^+ = \{x\colon x^{-1} \in M^-\}$.*

Доказательство. Предположим, что $M \setminus \mathring{M} \neq \Lambda$ и пусть $a \in M \setminus \mathring{M}$. В силу отделимости топологии, найдется окрестность V единицы группы такая, что $(a \cdot V) \cdot (a \cdot V) \not\ni 1$. Но тогда $(a \cdot V) \cap (a \cdot V)^{-1} = \Lambda$. Пусть $H_0^+ = a \cdot V$, $H_0^- = (a \cdot V)^{-1}$ и пусть уже для всех $\alpha < \beta$ построены множества H_α^+, H_α^-, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $\mathring{M} \cap (H_\alpha^+ \cup H_\alpha^-) = \Lambda$;
2) $H_\alpha^+ = \{x\colon x^{-1} \in H_\alpha^-\}$;
3) $H_\alpha^+ \subset H_{\beta'}^+$ при $\alpha < \beta' < \beta$;
4) H_α^+ — открытое множество.

Положим $H_\beta^+ = [\cup \{H_\alpha^+\colon \alpha < \beta\}]$, $H_\beta^- = [\cup \{H_\alpha^-\colon \alpha < \beta\}]$. Ясно, что в силу экстремальной несвязности топологии условия 1) — 4) выполняются. Теперь снова, если есть элемент $a \in M \setminus (H_\beta^+ \cup \mathring{M} \cup H_\beta^-)$, то найдется окрест-

* Все топологические пространства предполагаются отделимыми и недискретными.

ность V единицы группы такая, что $(a\cdot V)\cup(a\cdot V)^{-1}\subset M\diagdown(H_\beta^+\cup\mathring{M}\cup H_\beta^-)$ и $(a\cdot V)\cap(a\cdot V)^{-1}=\Lambda$. Пусть $H_{\beta+1}^+=(a\cdot V)\cup H_\beta^+$, $H_{\beta+1}^-=(a\cdot V)^{-1}\cup H_\beta^-$. Условия 1) — 4) выполнены и процесс может проводиться далее.

Пусть $\omega(m)$ — начальный ординал мощности $m=|M|^+$. Тогда $M^+=\cup\{H_\alpha^+:\ \alpha<\omega(m)\}$, $M^-=\cup\{H_\alpha^-:\ \alpha<\omega(m)\}$, $\mathring{M}$ — искомые множества.

Теорема 2. *Во всякой экстремально-несвязной группе есть открытая (и, значит, замкнутая) абелева подгруппа из элементов второго порядка.*

Доказательство. Так как $1\in\mathring{M}$ и $\mathring{M}$ открыто, то существует окрестность V единицы такая, что $V^2\subset\mathring{M}$. Заметим теперь, что если a, $b\in V$, то $(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)=1$, т. е. $ab=ba$. Пусть $\tilde{V}$ — подгруппа, порожденная множеством V. Это и есть искомая подгруппа.

Следствие 1. *На конечно-порожденной абелевой группе всякая экстремально-несвязная топология дискретна.*

Следствие 1 дает частичный ответ на вопрос А. В. Архангельского ([6]): существуют ли конечно-порожденные недискретные экстремально-несвязные группы?

Таким образом, для неабелевых групп этот вопрос остается открытым.

2. Здесь строится топологическая группа с максимальной топологией. Так как всякое максимальное пространство экстремально-несвязно, то в силу теоремы 2 необходимо взять абелеву бесконечную группу из элементов второго порядка. Простейшей такой группой является счетная группа, которая и была использована С. Сиротой для построения на ней экстремально-несвязной групповой топологии. Структура этой группы описывается следующим образом (см. также ([2])).

Пусть D — бесконечное счетное множество, а Ω — совокупность конечных подмножеств D. Превратим Ω в абелеву группу, положив $a+b=(a\diagdown b)\cup\cup(b\diagdown a)$. Пустое множество Λ при этом будет нейтральным элементом — нулем.

Через R_1 обозначим следующее высказывание (см. ([7], [8])):

Если ξ — центрированная система бесконечных подмножеств бесконечного счетного множества D и $|\xi|<\mathfrak{c}=2^{\aleph_0}$, то существует бесконечное множество $K\subset D$ такое, что $|K\diagdown A|<\aleph_0$ для всякого $A\in\xi$.

Известно (см. ([7])), что в предположении аксиомы Мартина (AM) R_1 выполняется.

Теорема 3 $[R_1]$. *Для всякой линейной гупповой топологии τ на Ω с базой мощности меньше $\mathfrak{c}$ существует линейная групповая максимальная топология $\tilde{\tau}$, большая чем τ.*

Напомним, что групповая топология называется линейной, если существует базис фильтра окрестностей нейтрального элемента, состоящий из подгрупп.

При доказательстве теоремы 3 фактически будем иметь дело только с фильтрами окрестностей нуля в групповой топологии. Такие фильтры будем обозначать буквами Φ, F (если нужно, с индексами). Фильтр Φ назовем линейным, если он имеет базу $b\Phi$, состоящую из подгрупп. Соответствующую групповую топологию будем обозначать через $\tau(\Phi)$.

Лемма 1 $[R_1]$. *Пусть $|b\Phi|<\mathfrak{c}$ для линейного фильтра Φ.*

Тогда существует линейный фильтр F со счетной базой и такой, что $F\supset\Phi$.

Доказательство. В силу R_1 существует последовательность $\{x_i:\ i<\omega_0\}$, сходящаяся к 0 в топологии $\tau(\Phi)$. Пусть K_n — подгруппа, порожденная множеством $\{x_i:\ i\geqslant n\}$. На систему подгрупп $\{K_n:\ n<\omega_0\}$ натянем искомый фильтр F.

Лемма 2. *Пусть Φ — линейный фильтр со счетной базой. $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$, причем $\Omega_1\cap\Omega_2=\Lambda$.*

Тогда существует линейный фильтр F со счетной базой такой что $F\supset\Phi$ и в топологии $\tau(F)$ какое-то из множеств Ω_1, Ω_2 не касается нуля (т. е. не содержит 0 в своем замыкании).

Лемма 2 — основная в доказательстве теоремы 3. Доказательство этой леммы разобьем в несколько более простых утверждений. Пусть $\{A_i\colon i<\omega_0\}$ — убывающая база фильтра Φ, состоящая из подгрупп.

1. Предположим, что уже выбраны точки x_i для $i<n$ такие что

$$(**)\ x_i\in A_i,\quad x_i\cap x_j=\Lambda,\quad |x_i|>\Sigma\{|x_k|\colon k<i\}\ \textit{для всех } i,\, j<n.$$

Выберем теперь x_n. Пусть $K\subset D$ и $|K|<\aleph_0$. Если бы для всякого $b\in A_n$ было $b\cap K\neq\Lambda$, то тогда нашлись бы два элемента b_1, $b_2\in A_n$ такие, что $b_1\neq b_2$, но $b_1\cap K=b_2\cap K$. Тогда $b_1+b_2\in A_n$, но $(b_1+b_2)\cap K=\Lambda$. Итак, найдется последовательность элементов $\{b_i\colon i<\omega_0\}\subset A_n$ таких, что $b_i\neq\Lambda$ и $b_i\cap(\Sigma\{x_k\colon k<n\}+\Sigma\{b_j\colon j<i\})=\Lambda$. Набрав нужное количество элементов b_i и сложив их, получим элемент $x_n\in A_n$ и такой, что условие $(**)$ выполняется при всех i, $j<(n+1)$. Следовательно, существует последовательность элементов $\{x_i\colon i<\omega_0\}$, удовлетворяющая условию $(**)$ при всех натуральных i, j.

2. Пусть X — подгруппа, порожденная множеством $\{x_i\colon i<\omega_0\}$. Ясно, что отображение $f\colon X\to N$ (натуральный ряд), определенное правилом $f(x)=|x|$, взаимно однозначно.

Приведем теперь утверждение $(***)$, которое легко получается как следствие из результатов N. Hindman (лемма 2.4 из ([9])) *.

$(***)$ *Пусть* $Z=\{Z_n\colon n<\omega_0\}$ *— последовательность натуральных чисел и* $z_i>\sum\{z_j\colon j<i\}$ *для всякого* $i<\omega_0$. *Пусть множество* P *всех конечных сумм различных элементов из* Z *разбито на два дизъюнктных множества* P_1 *и* P_2.

Тогда существует бесконечное множество $Y=\{y_n\colon n<\omega_0\}$ *натуральных чисел такое, что все конечные суммы различных элементов из* Y *лежат в каком-то одном множестве* P_1 *или* P_2. *Кроме того, всякий раз* $y_n=\Sigma\{z_i\colon i\in F_n\}$ *и* $\{F_n\colon n<\omega_0\}$ *есть совокупность конечных подмножеств натурального ряда, не пересекающихся друг с другом.*

В нашем случае за Z нужно принять последовательность $\{x_i\colon i<\omega_0\}$, за множества P, P_1, P_2 — соответственно $f(X)$, $f(X\cap\Omega_1)$ и $f(X\cap\Omega_2)$. Пусть тогда $\tilde{y}_n=\sum\{x_s\colon s\in F_n\}$ (здесь x_s, $y_n\in\Omega$, сумма берется в Ω). Так как $\tilde{y}_n\cap\tilde{y}_m=\Lambda$ при $n\neq m$ (ибо $F_n\cap F_m=\Lambda$ и $x_i\cap x_j=\Lambda$ при $i\neq j$), то подгруппа $\tilde{Y}$, порожденная множеством $\{\tilde{y}_n\colon n<\omega_0\}$ содержится в каком-то из множеств Ω_1 или Ω_2.

3. Пусть Y_n — подгруппа, порожденная множеством $\{\tilde{y}_k\colon k\geqslant n\}$. Натянем на систему подгрупп $\{Y_n\colon n<\omega_0\}$ искомый фильтр F.

Собственно доказательство теоремы 3. Все разбиения группы Ω на два дизъюнктных подмножества Ω_1 и Ω_2 занумеруем ординалами, меньшими $\mathfrak{c}=2^{\aleph_0}$. Затем по трансфинитной индукции, используя леммы 1 и 2, строим систему все больших и больших фильтров Φ_α, линейных и таких, что в топологии $\tau(\Phi_\alpha)$ нуля касается только одно множество Ω_1 или Ω_2 из разбиения с номером, меньшим или равным α. Фильтр $\Phi=\cup\{\Phi_\alpha\colon\alpha<\mathfrak{c}\}$ дает искомую топологию.

Следствие $[R_1]$. *Существует счетное плотное в себе подмножество* $\beta D\setminus D$ *(*βD *— чех-стоуновское расширение счетного дискретного пространства* D*), состоящее из точек — ультрафильтров одинакового типа, т. е. переводящихся одна в другую взаимно однозначной перестановкой множества* D.

Действительно, в построенной выше группе $(\Omega,\tau(\Phi))$ для всякой точки $x\in\Omega$ система $\gamma(x)=\{Ox\setminus\{x\}\colon x\in Ox\in\tau\}$ содержит базис ультрафильтра ([5]), который обозначим через $\tilde{x}$. Множество $\{\tilde{x}\colon x\in\Omega\}$, с топологией подпространства из $\beta D\setminus D$ искомое.

3. Назовем пространство (X,τ) **гиперэкстремально-несвязным**, если из того, что $x\in[G]$, где $G\in\tau$, следует, что $\{x\}\cup G\in\tau$. Ясно что

* Лемма 2,4 была получена N. Hindman в предположении справедливости гипотезы Грехэма – Ротшильда. Позднее, в ([10]), N. Hindman доказал эту гипотезу (обо всем этом см. ([9], [10])).

всякое максимальное пространство гиперэкстремально-несвязно, а последнее экстремально-несвязно. Гиперэкстремально-несвязные группы можно получить, не используя результат N. Hindman.

Теорема 4 $[R_1]$. *Для всякой линейной групповой топологии* τ *на* Ω *с базой мощности меньше* $\mathfrak{c}$ *существует линейная групповая гиперэкстремально-несвязная топология* $\tilde{\tau}$, *большая чем* τ.

Основной в доказательстве теоремы 4 является

Лемма 3. *Пусть* F — *линейный фильтр со счетной базой,* $G\in\tau(F)$, $0\in[G]$ *и* $\{x_n\colon n<\omega_0\}$, *лежащая в* G *и сходящаяся к* 0 *в топологии* $\tau(F)$ *последовательность элементов группы.*

Тогда существует линейный фильтр F', *больший чем* F *и такой, что* $\{0\}\cup G\in\tau(F')$.

Пользуюсь случаем выразить искреннюю благодарность проф. В. И. Пономареву и участникам руководимого им семинара за обсуждение данной работы.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
26 IV 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *С. М. Сирота,* Математич. сборн., т. 79, 2, 179 (1969). [2] *В. И. Малыхин,* ДАН, т. 218, № 5, 1071 (1974). [3] *E. Hewitt,* Duke Math. J., v. 10, № 1, 309 (1943). [4] *М. Катетов,* Математич. сборн., т. 21 (63), 1, 3 (1947). [5] *А. Г. Елькин,* Вестн. Московск. унив., сер. матем., мех., № 5, 51 (1969). [6] *А. В. Архангельский,* ДАН, т. 175, № 4, 751 (1967). [7] *D. Booth,* Ann. Math. Logic, v. 2, № 1 (1970). [8] *В. И. Малыхин, Б. Э. Шапировский,* ДАН, т. 213, № 3, 532 (1973). [9] *N. Hindman,* Proc. Am. Math. Soc., v. 36, № 2, 341 (1972). [10] *N. Hindman,* J. Combinatorial Theory, in press.