Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 1

УДК 519.1 МАТЕМАТИКА

Т. Р. МИНИНА, В. Т. ПЕРЕКРЕСТ

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА

(Представлено академиком Б. Н. Петровым 13 VI 1974)

Существуют разнообразные методы нахождения решений задачи коммивояжера (ЗК) (см. ([1–5])), однако все они при реализации на ЦВМ требуют либо чрезвычайно большого времени счета, либо большого объема оперативной памяти машины (растущих экспоненциально при возрастании размерности ЗК), в силу чего на существующих ЦВМ за приемлемое время возможно решение ЗК максимальной размерности 40—60. Использование эвристических методов ([7, 8]) позволяет получать хорошее приближение решения ЗК размерности до 200—300. В настоящей заметке решение ЗК аппроксимируется циклами, обладающими вводимым ниже свойством оптимальности в среднем (C-оптимальности). Использование C-оптимальных циклов позволяет, в частности, рассматривать ЗК размерности до 5000.

Рассмотрим ЗК размерности n с матрицей «расстояний» $A=\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, $a_{ii}=0$, $1\leqslant i\leqslant n$. Положим $I=\{1, 2, \ldots, n\}$, и пусть m — некоторое натуральное число, непревосходящее $n-1$, θ, $\gamma\in I$, а S — некоторое подмножество множества $I\diagdown\{\theta, \gamma\}$, состоящее из m элементов. Обозначим через $J(\theta, \gamma, S)$ совокупность всех маршрутов, начинающихся в пункте с номером θ, заканчивающихся в пункте с номером γ, проходящих через все пункты, номера которых принадлежат набору S, и только через них (при этом каждый пункт проходится лишь один раз). Очевидно, каждый маршрут класса $J(\theta, \gamma, S)$ однозначно определяется некоторой перестановкой $\hat{j}=(j_1, \ldots, j_m)$ элементов набора S, которую будем отождествлять с соответствующим ей маршрутом $(\theta, \hat{j}, \gamma)$. Длина $f(\hat{j})$ маршрута $\hat{j}=(j_1, \ldots, j_m)\in J(\theta, \gamma, S)$ определяется равенством

$$f(\hat{j})=f(\hat{j}; \theta, \gamma)=\sum_{l=1}^{m+1} a_{j_{l-1}, j_l}, \quad j_0=\theta, \quad j_{m+1}=\gamma.$$

Далее, для любых $\beta\in S$, $U\subset S\diagdown\{\beta\}$ обозначим через $h(\beta, U)$ среднюю длину маршрутов класса $J(\beta, \gamma, U)$, т. е.

$$h(\beta, U)=\frac{1}{|U|!}\sum_{\hat{i}\in J(\beta, \gamma, U)} f(\hat{i}),$$

где через $|U|$ обозначено число элементов множества U.

Будем говорить, что маршрут $\hat{j}=(j_1, \ldots, j_m)\in J(\theta, \gamma, S)$ **оптимален в среднем** (C-**оптимален**), если для любого $p=1, \ldots, m-1$ натуральное j_p таково, что

$$a_{j_{p-1} j_p}+h(j_p, \{j_{p+1}, \ldots, j_m\})= \\ =\min_{p\leqslant k\leqslant m}\{a_{j_{p-1}, j_k}+h(j_k, \{j_p, \ldots, j_{k-1}, j_{k+1}, \ldots, j_m\})\}. \tag{1}$$

Определим для любого $i=0, 1, \ldots, m-2$ и для любого набора $\hat{j}_i=(j_1, \ldots, j_i)\in S$ ($j_l\neq j_k$ при $l\neq k$) функционал $\Psi_{\gamma, \hat{j}_i}$ на множестве

$S_i=S\setminus\hat{j}_i$ равенством

$$\Psi_{\gamma,\hat{j}_i}(\alpha)=a_{j_i,\alpha}-\frac{1}{m-i-1}\Bigl(a_{\alpha,\gamma}+\sum_{l\in S_i}a_{l,\alpha}\Bigr), \qquad (2)$$

где при $i=0$ полагаем $j_0=\theta$, $\hat{j}_0=\not{o}$, $S_0=S$.

Теорема 1. *Пусть $\hat{j}=(j_1,\ldots,j_m)\in J(\theta,\gamma,S)$. Тогда для того чтобы маршрут $\hat{j}$ был С-оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы для любого $i=0,\ldots,m-2$ выполнялось равенство*

$$\Psi_{\gamma,\hat{j}_i}(j_{i+1})=\min_{\alpha\in S_i}\Psi_{\alpha,\hat{j}_i}(\alpha).$$

Следствие. *С-оптимальный маршрут класса $J(\theta,\gamma,S)$ можно построить за $3m^2+2m-4$ арифметических операций.*

Как легко видеть, функционал $h(\beta,U)$ при построении C-оптимального маршрута (см. (1)) играет ту же роль, что и функционал $h^*(\beta,U)$, равный длине кратчайшего маршрута класса $J(\beta,\gamma,U)$, при использовании динамического программирования для построения кратчайшего пути класса $J(\theta,\gamma,S)$ ([2], [3]). При этом, как следует из ([3]), в последнем случае требуется $m\cdot2^{m-1}$ ячеек памяти и выполнение $m^2\cdot2^{m-2}$ арифметических операций. При использовании вместо функционала $h^*(\beta,U)$ «макрохарактеристики» класса $J(\beta,\gamma,U)$ — средней длины $h(\beta,U)$ маршрутов этого класса, получается, вообще говоря, не кратчайший (оптимальный) маршрут класса $J(\theta,\gamma,S)$, а лишь C-оптимальный. Однако, как следует из проведенных на ЦВМ экспериментов, с помощью C-оптимальных маршрутов легко строить маршруты, достаточно близкие к оптимальным, а с другой стороны, как следует из теоремы 1 и равенства (2), для построения C-оптимального маршрута класса $J(\theta,\gamma,S)$ достаточно выполнить $3m^2+2m$ арифметических операций и требуется не более $(m+1)^2$ ячеек оперативной памяти ЦВМ.

Положив теперь $\theta=\gamma=\beta$, $S^{(\beta)}=I\setminus\{\beta\}$ для любого $\beta\in I$, получаем C-оптимальный гамильтонов цикл $\hat{j}^{(\beta)}=(j_2,\ldots,j_n)\in J(\beta,\beta,S^{(\beta)})$. Очевидно, для построения C-оптимального цикла достаточно выполнение арифметических операций порядка $3n^2$ и существует не более n различных C-оптимальных циклов. Для сравнения укажем, что для построения 3-оптимального цикла (см. ([8])) требуется выполнение арифметических операций порядка $3\cdot5n^3$ и существует порядка $(n-4)!$ различных 3-оптимальных циклов, а для построения одного цикла по методу ([7]) требуется $n^3/3$ арифметических операций и существует $n(n-1)/2$ различных циклов, оптимальных в смысле ([7]).

Далее, из равенства (2) и теоремы 1 следует, что алгоритм построения C-оптимальных циклов является обобщением известного правила «выбора ближайшего пункта». Эти алгоритмы совпадают, в частности, если на каждом шаге вместо исходной матрицы A рассматривать матрицу-образ для соответствующего неполного графа ([3], [9]).

Так как C-оптимальные циклы, вообще говоря, могут содержать подмаршруты, не являющиеся C-оптимальными, то рассмотрим следующие способы локального улучшения C-оптимальных циклов.

Первый способ. Пусть $\hat{j}=(j_1,\ldots,j_m)$ — некоторый C-оптимальный маршрут. Будем последовательно делить маршрут $\hat{j}$ на $2,3,\ldots,[m/2]$ частей и заменять получающиеся подмаршруты на C-оптимальные, если полученный C-оптимальный подмаршрут короче исходного. Полученный с помощью этой процедуры маршрут будем называть $\hat{C}$-оптимальным. Как легко проверить, для получения $\hat{C}$-оптимального маршрута $\hat{j}$ длины m, ($\hat{j}\in J(\theta,\gamma,S)$, где набор S состоит из m чисел) требуется выполнить не более $(3m^2+2m)\cdot(1+\ln m)$ арифметических операций.

Второй способ. Пусть теперь m, p, q, p, $q<m$,— некоторые натуральные числа, и пусть $\hat{j}=(j_1,\ldots,j_m)\in J(\theta,\gamma,S)$ — некоторый C-опти-

мальный цикл. Этот способ локального улучшения цикла $\hat{j}$ заключается в последовательном рассмотрении подмаршрутов длины q, начинающихся в пунктах j_{pi}, $i=0, 1, \ldots, [m/p]-1$, с последующей заменой их (в случае уменьшения длины) на C-оптимальные. Полученный таким образом цикл будем называть $C^1_{p,q}$-оптимальным. Для любого натурального $k\geqslant 2$ $C^{k-1}_{p,q}$-оптимальным циклом будем называть любой цикл, полученный указанным выше способом из некоторого $C^{k-1}_{p,q}$-оптимального. Как легко убедиться, для построения $C^k_{p,q}$-оптимального цикла требуется выполнить не более $(3m+2+k(3q^2+2q)/p)m$ арифметических операций.

Рассмотрим теперь следующую простейшую схему получения приближенного решения ЗК, заключающуюся в выборе из некоторой совокупности достаточно хороших циклов наилучшего, а именно: будем понимать под $C(\hat{C}, C^k_{pq})$-аппроксимацией решения ЗК кратчайший из $C(\hat{C}, C^k_{p,q})$-оптимальных циклов. Таким образом, процедура построения $C(\hat{C}, C^k_{p,q})$-аппроксимации решения ЗК с n пунктами сводится к построению n $C(\hat{C}, C^k_{p,q})$-оптимальных гамильтоновых циклов, начинающихся в каждом из рассматриваемых пунктов.

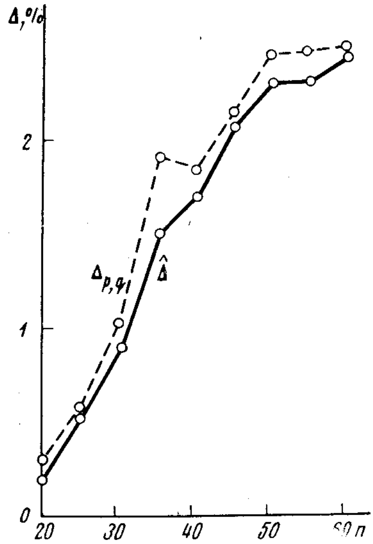

Рис. 1

Теорема 2. *Для построения C-, $\hat{C}$-, $C^k_{p,q}$-аппроксимаций решения задачи коммивояжера размерности n достаточно выполнение числа арифметических операций соответственно порядка $2n^3$, $2n^3 \ln n$, $2n^2(n+1{,}5kq^2/p)$.*

C-аппроксимации решений ЗК, как правило, локально улучшаемы. Авторами были вычислены значения $\hat{\Delta}=\hat{\Delta}(n)$ и $\Delta_{p,q}=\Delta_{p,q}(n)$ средней эффективности $\hat{C}$- и $C^1_{p,q}$-аппроксимаций относительно C-аппроксимации для ЗК размерности $n=20, 25, 30 \ldots, 60$ с пунктами, равномерно распределенными в единичном квадрате, для чего для каждого из указанных n рассматривалось по 80 ЗК с пунктами, случайным образом выбранными в единичном квадрате. В качестве приближенного значения величины $\hat{\Delta}(n)$ $(\Delta_{p,q}(n))$ брали среднее арифметическое относительных эффективностей для полученных ЗК. Полученные кривые изображены на рис. 1 (параметры p и q $C^1_{p,q}$-аппроксимации везде выбирались равными $q=n/4$, $p=q/4$, где n — размерность соответствующей ЗК).

Далее, авторами были получены C-, $\hat{C}$-, $C^1_{p,q}$- и $C^2_{p,q}$-аппроксимации решений ЗК, опубликованных в [3] (на 25 и 48 городов), [6] (на 33, 42 и 57 городов), [9] (на 29 городов) (параметры p и q для $C^2_{p,q}$-аппроксимаций выбирались, как указано выше). В табл. 1 приведены данные о полученных циклах. В частности, для рассмотренных ЗК средние относительные погрешности C-, $\hat{C}$-, $C^1_{p,q}$- и $C^2_{p,q}$-аппроксимаций соответственно равны 3,41%, 1,93%, 1,38% и 0,70%. Заметим, что наилучшие из известных циклов для указанных выше ЗК были получены с помощью метода [7], для реализации которого требуется выполнение порядка $n^5/6$ арифметических операций. Эти же циклы для рассмотренных выше ЗК размерности 29, 33, 42 и 57 получаются, если описанную в [7] процедуру улучшения цикла применить к C- и C-аппроксимациям соответствующих ЗК

Таблица 1

Размерность задачи	Длина наилучшего из известных циклов	Относительная погрешность, %			
		C	$\hat{C}$	$C^1_{p,q}$	$C^2_{p,q}$
25	1711	0,00	0,00	0,00	0.00
29	3988	2,28	0,50	0.50	0.50
33	10861	6,67	3,19	1,89	0.63
42	699	2,15	1,43	1,86	1,86
48	11461	5,00	4,02	3,21	0.62
57	12955	4,38	2,24	0,57	0,57

(в этом случае для получения наилучшего из известных циклов достаточно выполнение числа арифметических операций соответственно порядка $2{,}3n^3$ и $2n^3 \ln(1, 3n)$. Для ЗК размерности 48, указанной выше, с помощью этой процедуры из $C^2_{p,q}$-аппроксимации получается цикл, отличающийся на 0,4% от полученного в ([7]) (в остальных случаях $C^2_{p,q}$-аппроксимации неулучшаемы с помощью методов ([7])).

Таким образом, технику ([7]) целесообразно применять к C-, $\hat{C}$- и $C^k_{p,q}$-оптимальным циклам; при этом каждый из указанных циклов однозначно определяется «начальной» точкой (т. е. точкой, с которой начинается его построение), а не парой точек, как в случае циклов, строящихся в ([7]), что упрощает задачу о «разумном» выборе начальных данных для строящихся циклов. Решение этой задачи в случае C-, $\hat{C}$-, $C^k_{p,q}$-оптимальных циклов за Kn^2 арифметических операций, в частности, позволяет получить алгоритмы построения достаточно точной аппроксимации решения ЗК за $K'n^2$ арифметических операций (здесь K и K' — некоторые положительные постоянные).

В заключение заметим, что предложенный в заметке подход применим к достаточно широкому классу задач комбинаторного типа.

Авторы благодарят В. И. Варшавского за ценные обсуждения.

Ленинградское отделение
Центрального экономико-математического института
Академии наук СССР

Поступило
12 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *G. B. Dantzig, D. R. Fulkerson, S. M. Johnson,* Operation Res., v. 7, 1, 58 (1959). [2] *Р. Беллман,* Кибернетич. сб., в. 9, М., 1964, стр. 219. [3] *М. Хелд, Р. М. Карп,* Там же, стр. 202. [4] *Дж. Литл, К. Мурти и др.,* Экономика и матем. методы, т. 1, 1, 94 (1965). [5] *В. К. Коробков, Р. Е. Кричевский,* Сб. Математические модели и методы оптимального планирования, М., 1966, стр. 106. [6] *R. L. Karg, G. L. Thompson,* Management Sci., v. 10, 2, 225 (1964). [7] *T. C. Raymond,* IBM J. Res. and Developm., v. 13, 4, 400 (1969). [8] *S. Lin,* Bell System Techn. J., v. 44, 10, 2245 (1965). [9] *В. И. Варшавский, Г. В. Епифанов, Т. Р. Минина,* Экономика и матем. методы, т. 10, 2 (1974).