Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 5

УДК 513.88+519.47 *МАТЕМАТИКА*

А. В. БУХВАЛОВ

О ДВОЙСТВЕННОСТИ ФУНКТОРОВ, ПОРОЖДАЕМЫХ ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 29 VII 1974)

В работе полностью решена задача об описании в категории всех банаховых пространств функтора, двойственного к функтору, порожденному пространством измеримых вектор-функций, и об описании колец операторов в этих функторах, поставленная в статье Б. С. Митягина и А. С. Шварца ([1], стр. 122—123).

1. Обозначения и терминология. В терминологии из теории функторов мы следуем [1], из теории полуупорядоченных пространств — [2]. Далее через $\mathcal{K}$ обозначается некоторая регулярная категория банаховых пространств, содержащая все конечномерные пространства. Если $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ — функторы в $\mathcal{K}$, то $\mathcal{D}\mathcal{E}$ — двойственный функтор, а $\{\mathcal{E}\to\mathcal{F}\}$ — банахово пространство отображений из $\mathcal{E}$ в $\mathcal{F}$ (если эти объекты существуют). Через X, Y, Z обозначаются банаховы пространства, X^*, Y^*, Z^* — их сопряженные; 1_X — тождественное отображение, $(X\to Y)$ — пространство непрерывных операторов из X в Y, $X\hat{\otimes}Y$ — пополненное проективное тензорное произведение.

Пусть E — K-линеал (= векторая решетка), $E_+=\{e\in E\colon e\geqslant 0\}$. Векторное подпространство G в E называется идеалом, если $((|e_1|\leqslant|e_2|,\ e_1\in E,\ e_2\in G)\Rightarrow(e_1\in G))$. Идеал G в E называется фундаментом, если для любого $e\in E$ $(e\neq 0)$ существует $g\in G$: $0<g\leqslant|e|$. Пусть F — K-пространство (= условно полная векторная решетка). Линейный оператор $\alpha\colon E\to F$ называется регулярным $(\alpha\in H_r(E\to F))$, если существует линейный оператор $|\alpha|\colon E\to F$, определяемый по формуле $|\alpha|(e)=\sup\{|\alpha(g)|:|g|\leqslant e\}$, $e\in E_+$.

KB-линеалом (= банаховой решеткой) называется векторная решетка с монотонной нормой. Банаховым KN-пространством называется KB-линеал, являющийся K-пространством. Говорят, что норма в банаховом KN-пространстве E удовлетворяет условию: (A), если из $0\leqslant e_n\downarrow 0$ следует $\|e_n\|\to 0$; (B), если из $0\leqslant e_n\uparrow$, $\|e_n\|\leqslant C<\infty$, $n\geqslant 1$, следует, что $\exists\sup e_n\in E$; (C), если из $0\leqslant e_n\uparrow e\in E$ следует $\sup\|e_n\|=\|e\|$.

Заменив в (B) и (C) последовательности направлениями, получим условия (B′) и (C′).

2. Функтор, порожденный тензорным произведением. Далее в этом пункте E и F — KB-линеалы. Следуя [3], обозначим через $E\tilde{\otimes}X$ пополнение $E\otimes X$ по норме

$$n_E\left(\sum e_k\otimes x_k\right)=\inf\left\{\|e\|_E\colon e\geqslant\left|\sum e_k\langle x_k,x^*\rangle\right|\ \forall x^*\in X^*,\ \|x^*\|\leqslant 1\right\},$$

через Φ_E — соответствующий функтор в $\mathcal{K}(\Phi_E(X)=E\tilde{\otimes}X,\ \Phi_E(\alpha)=1_E\otimes\alpha)$. Пусть

$$S(E\to X)=\Big\{\alpha\in(E\to X):\|\alpha\|_S=$$
$$=\sup\left\{\left(\sum\|\alpha e_k\|\right)\left(\left\|\sum e_k\right\|\right)^{-1}:\{e_k\}_{k=1}^n\subset E_+\right\}<\infty\Big\}$$

(0/0=0) (см. [3]). Обозначим через S_E функтор, действующий по формулам $S_E(X)=S(E\to X)$, $[S_E(\alpha)](\beta)=\alpha\beta$, где $\beta\in S(E\to X)$, $\alpha\in(X\to Y)$. Если $\alpha\in S(E\to X)$, $\beta\in(Y\to Z)$, то существует непрерывное продолжение $\alpha\otimes\beta$ до оператора $\alpha\hat{\otimes}\beta\in(E\hat{\otimes}Y\to X\hat{\otimes}Z)$. Для любого $\alpha\in S(E\to X)$ положим

$$(I_X(\alpha))_Y=\alpha\hat{\otimes}1_Y,\ I(\alpha)=\{I_X(\alpha)\}.$$

Следующая теорема по существу содержится в работе [3].

Теорема 1. *Отображение I осуществляет изометрию функтора S_E на $\mathscr{D}\Phi_E$.*

Определение 1. Для $\alpha\in(E\to F)$ положим

$$\|\alpha\|_1=\sup\frac{\|\sum|\alpha e_k|\|}{\|\sum|e_k|\|},\quad \|\alpha\|_\infty=\sup\frac{\|\sup|\alpha e_k|\|}{\|\sup|e_k|\|},$$

где супремум берется по всевозможным конечным наборам $\{e_k\}_{k=1}^n\subset E$. Через $K(E\to F)$ обзначим банахово пространство всех $\alpha\in(E\to F)$ таких, что $\|\alpha\|_1<\infty$ с нормой $\|\alpha\|_1$.

Если F — банахово KN-пространство, то $H_r(E\to F)$ с нормой $\|\alpha\|_0=\||\alpha|\|_{(E\to F)}$ есть банахово KN-пространство; если дополнительно в F выполнены (B′) и (C′), то $K(E\to F)=H_r(E\to F)$ и $\|\alpha\|_0=\|\alpha\|_1=\|\alpha\|_\infty$.

Теорема 2. *Пусть E и F — KB-линеалы. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) $\|\alpha\|_1<\infty$;
2) $\|\alpha\|_\infty<\infty$;
3) $\alpha\in H_r(E\to F^{**})$.

При этом $\|\alpha\|_1=\|\alpha\|_\infty=\||\alpha|\|_{(E\to F^{**})}$.

Если $\alpha\in K(E\to F)$, $\beta\in(X\to Y)$, то существует непрерывное продолжение $\alpha\otimes\beta$ до оператора $\alpha\tilde{\otimes}\beta\in(E\tilde{\otimes}X\to F\tilde{\otimes}Y)$. Для любого $\alpha\in K(E\to F)$ положим $[J(\alpha)]_X=\alpha\tilde{\otimes}1_X$.

Теорема 3. *Отображение J осуществляет изометрию $K(E\to F)$ на $\{\Phi_E\to\Phi_F\}$.*

Теоремы этого пункта обобщают результаты из [3].

3. Функтор вектор-функций. В этом пункте через E и F обозначены банаховы KN-пространства, причем E является фундаментом в K-пространстве всех измеримых п.в. конечных функций $S(T,\Sigma,\mu)$, а F — в $S(T_1,\Sigma_1,\mu_1)$, где μ и μ_1 — полные σ-конечные меры. Оператор $\alpha\in H_r(E\to F)$ называется вполне линейным ($\alpha\in H_n(E\to F)$), если из $e_n\downarrow 0$ следует $|\alpha|(e_n)\uparrow 0$. Норма на $H_n(E\to F)$ индуцирована из $H_r(E\to F)$. По определению $\bar{E}=H_n(E\to R^1)$. Известно, что $\bar{E}$ разделяет точки на E и $\bar{E}$ можно отождествить с множеством всех $e^*\in S(T,\Sigma,\mu)$ таких, что $\int|ee^*|d\mu<\infty$ для любого $e\in E$ $((f\in\bar{E})\Leftrightarrow(\exists e^*\in S(T,\Sigma,\mu):\ f(e)=\int ee^*\,d\mu$ для $\forall e\in E))$ [4].

Обозначим через $M_{\bar{E}}(E\to X)$ подпространство в $S(E\to X)$ всех $\alpha\in S(E\to X)$ таких, что найдется функция $e^*\in\bar{E}_+$ такая, что $\|\alpha e\|\leqslant\int|e|e^*\,d\mu$, $e\in E$. Определим функтор M_E: $M_E(X)=M_{\bar{E}}(E\to X)$, $[M_E(\beta)](\alpha)=\beta\alpha$, где $\beta\in(X\to Y)$.

Определение 2. Через $E(X)$ обозначим банахово пространство всех измеримых [5] функций $\vec{z}$: $T\to X$ таких, что функция $v(\vec{z})(t)=\|\vec{z}(t)\|_X$ входит в E, с нормой $\|\vec{z}\|=\|v(\vec{z})\|_E$. Функтор $\mathbf{E}$ сопоставляет $X\in\mathscr{K}$ пространство $E(X)$ и $\alpha\in(X\to Y)$ — оператор $\mathbf{E}(\alpha)\in(E(X)\to E(Y))$, действующий по формуле: если $\vec{z}\in E(X)$, то $[\mathbf{E}(\alpha)(\vec{z})](t)=\vec{z}(\alpha(t))$ $(t\in T)$.

Так как $E\widetilde{\otimes}X$ изометрически вкладывается в $E(X)$, то Φ_E — подфунктор в $\mathbf{E}$. Если в E выполнено (A), то $\Phi_E=\mathbf{E}$ в любой категории $\mathscr{K}$. Как показывает теорема 6 из ([6]), если $\Phi_E=\mathbf{E}$ в категории всех банаховых пространств, то в E выполнено (A). Из результатов п. 1 получается

Теорема 4. *Пусть в E выполнено* (A). *Тогда:*

1) *Если мера μ дискретна или все пространства из $\mathscr{K}$ рефлексивны, то функторы $\mathscr{D}\mathbf{E}$ и $\overline{\mathbf{E}}$ изометричны.*

2) *Если в F выполнены* (C) *и* (B), *то $H_n(E\to F)=\{\mathbf{E}\to\mathbf{F}\}$.*

Пусть далее до конца работы $\mathscr{K}$ — категория всех банаховых пространств. Через $(E,\ o(E,\ \overline{E}))(X)$ обозначим пространство $E(X)$ с топологией, определяемой полунормами: $p_f(\vec{z})=f(v(\vec{z}))$, где f пробегает $\overline{E}_+$. Отметим, что $E\otimes X$ плотно в $(E,\ o(E,\ \overline{E}))(X)$. Если $\alpha\in M_{\overline{E}}(E\to X)$, $\beta\in(Y\to\to Z)$, то существует продолжение $\alpha\otimes\beta$ до непрерывного оператора $\alpha\hat{\hat{\otimes}}\beta$ из $(E,\ o(E,\ \overline{E}))(Y)$ в $X\hat{\otimes}Z$. Для любого $\alpha\in M_{\overline{E}}(E\to X)$ положим $[U_X(\alpha)]_Y==\alpha\hat{\hat{\otimes}}1_Y$, $U(\alpha)=\{U_X(\alpha)\}$.

Теорема 5. *Отображение U осуществляет изометрию функтора M_E на $\mathscr{D}\mathbf{E}$.*

В частности, $\mathscr{D}\mathbf{E}(X^*)=s(X)\text{-}\overline{E}(X^*)$ (см. ([6])). Для любого $\alpha\in M_{\overline{E}}(E\to Y)$ существует единственное продолжение $\tilde{\alpha}\in M_{\overline{E}}(\overline{\overline{E}}\to Y)$. Для $\vec{z}\in\overline{\overline{E}}(X)$ положим $[A_X(\vec{z})]_Y=(\tilde{\alpha}\hat{\hat{\otimes}}1_X)(\vec{z})$, $A(\vec{z})=\{A_X(\vec{z})\}$.

Теорема 6. *Отображение A осуществляет изометрию функтора $\overline{\overline{\mathbf{E}}}$ на $\mathscr{D}M_E$.*

Следствие. 1) *Функтор $\mathbf{E}$ рефлексивен тогда и только тогда, когда в E выполнены условия* (C) *и* (B).

2) *Функтор $\mathscr{D}\mathbf{E}=M_E$ рефлексивен.*

Определение 3. Через $K_n(E\to F)$ обозначим банахово пространство всех операторов $\alpha\in K(E\to F)$ с нормой $\|\alpha\|_1$, удовлетворяющих:

1) $\alpha\in H_n(E\to\overline{\overline{F}})$;

2) для любой последовательности $\{e_n\}\subset E_+$ такой, что $e_n\wedge e_m=0$, $n\neq\neq m$, и $\sup e_n\in E$, существует

$$\sup\left\{\sum_{n=1}^{m}|\alpha e_n|: m\geqslant 1\right\}\in F.$$

Пусть в F выполнено (C). Если μ дискретна или в F выполнено (B), то $K_n(E\to F)=H_n(E\to F)$. Если $\alpha\in K_n(E\to F)$, $\beta\in(X\to Y)$, то существует продолжение $\alpha\otimes\beta$ до непрерывного оператора $\alpha\overset{\approx}{\otimes}\beta$ из $(E,\ o(E,\ \overline{E}))(X)$ в $(F,\ o(F,\ \overline{F}))(Y)$. Для любого $\alpha\in K_n(E\to F)$ положим $i_X(\alpha)=\alpha\overset{\approx}{\otimes}1_X$, $i(\alpha)==\{i_X(\alpha)\}$.

Теорема 7. *Отображение i осуществляет изометрию $K_n(E\to F)$ на* $\{\mathbf{E}\to\mathbf{F}\}$.

Следствие. *Пространство $\{M_E\to M_F\}$ изометрично $H_n(F\to\overline{\overline{E}})$ и $H_n(\overline{\overline{F}}\to\overline{\overline{E}})$.*

4. Приложение результатов п. 3 к функтору Φ_E.

Теорема 8. *Пусть E — KB-линеал.*

1) *Функтор $\mathscr{D}\Phi_E(=S_E)$ рефлексивен.*

2) *Функтор Φ_E рефлексивен тогда и только тогда, когда E — банахово KN-пространство с условиями* (A) *и* (B).

Замечание. 1) Доказательства теорем п. 3, являющихся основными результатами работы, основаны на технике специальных последовательностей ([1]) и аналитическом представлении операторов и функционалов на пространстве $E(X)$ (см. ([6])).

2) Несмотря на общность изложения результаты являются новыми для многих конкретных пространств. Так, теоремы 5 и 7 являются новыми для $L^\infty[0, 1]$, несепарабельных пространств Орлича $L_M[0, 1]$, пространств Марцинкевича; теоремы 6 и 8 — уже для пространств $L^p[0, 1]$, $1<p\leqslant\infty$.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
13 VII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Б. С. Митягин, А. С. Шварц*, УМН, т. 19, в. 2, 65 (1964). [2] *Б. З. Вулих*, Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961. [3] *В. Л. Левин*, Тр. Московск. матем. общ., т. 20, 43 (1969). [4] *Б. З. Вулих, Г. Я. Лозановский*, Матем. сб., т. 84 (126), 3, 331 (1971). [5] *Н. Данфорд, Дж. Шварц*, Линейные операторы, т. 1, М., 1961. [6] *А. В. Бухвалов*, ДАН, т. 208, № 5, 1012 (1973).