Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 5

УДК 517.92+513.88

МАТЕМАТИКА

М. А. ВАЛИЕВ

МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 19 VIII 1974)

Рассмотрим в гильбертовом пространстве H задачу Коши

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon u_t - A(t)u = f(t), \quad u(t, \varepsilon)|_{t=0} = \varphi; \tag{1}$$

здесь $u(t, \varepsilon)$ — искомая, $f(t)$ — известная функции, определенные на $[0, T]$ со значениями в H при фиксированном $\varepsilon>0$; $A(t)$ — линейный, вообще говоря, неограниченный при каждом $t\equiv[0, T]$ оператор в H, с областью определения, не зависящей от t.

В настоящей заметке будет изложен алгоритм теории сингулярных возмущений, позволяющий получить асимптотическое при $\varepsilon\to0$ решение любого порядка задачи (1), единственное в определенном классе функций и сформулированы соответствующие теоремы. Некоторые вопросы для однородных уравнений в гильбертовом пространстве вида $\varepsilon u_t + A(t)u = 0$ с ограниченным оператором $A(t)$ были изучены в [7]. Для нелинейного уравнения в банаховом пространстве вида

$$\varepsilon y' = F(\varepsilon, y), \quad F(\varepsilon, y) = \sum_{i+j\geqslant 1} F_{ij}\varepsilon^i y^i \tag{2}$$

при условии, что оператор F_{01} неограничен и порождает полугруппу с экспоненциальным убыванием, в [5] в случае условий Коши доказана теорема существования и построена асимптотика типа пограничного слоя. Подробную библиографию и дальнейшие ссылки по изучению асимптотических решений типа пограничного слоя можно найти, например, в [4, 6, 9, 11].

Однако, как отмечалось в работах В. Вазова [10], Л. Ломова [2, 3], такие решения выходят за рамки общей теории возмущений из-за наличия в них резонансных членов (поэтому в колебательном случае указанные разложения не получают). Напротив, регуляризованные асимптотические разложения не содержат резонансных членов, поэтому метод регуляризации позволяет развивать общую теорию возмущений независимо от характера спектра. В дальнейшем для получения регуляризованных асимптотических разложений задачи (1) мы применим метод, разработанный С. Ломовым в [1-3] для различных классов сингулярно возмущенных задач как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для уравнений с частными производными. О возможности и некоторых идеях перенесения метода возмущений на дифференциально-операторные уравнения отмечалось в [2]. Сформулируем основные предположения в виде условий.

Условие А. $A(t)$ при каждом $t\in[0, T]$ является линейным неограниченным замкнутым оператором с областью определения, не зависящей от t и всюду плотной в H. Пусть еще $A(t)$ имеет только дискретный спектр $\{\lambda_i(t)\}$, удовлетворяющий условию

$$\ldots < \operatorname{Re}\lambda_i(t) < \ldots < \operatorname{Re}\lambda_2(t) < \operatorname{Re}\lambda_1(t) < 0. \tag{3}$$

Условие В. Резольвента $R(\lambda, A(t))$ определена для значений λ, содержащихся в области Q, $Q=\{\lambda\colon -\theta<\arg\lambda<\theta\}$, $\theta>{}^1/_2\pi$, сильно непрерывна по t равномерно относительно значений λ, из любого компактного множества, лежащего в Q, имеет место неравенство

$$\|(A(t)-\lambda E)^{-1}\| \leqslant N(|\lambda|-M)^{-1}, \tag{4}$$

где N и M — положительные постоянные, $|\lambda|>M$. Пусть также существует такая постоянная $K>0$, что при $s, t, r \in [0, T]$

$$\|A(t)A^{-1}(s)-A(r)A^{-1}(s)\| \leqslant K|t-r|.$$

Если выполнены условия A, B и $f(t) \in C[0, T, H]$, тогда в ([8]) показано, что задача (1) имеет единственное решение при каждом $\varepsilon>0$ и оно представляется в виде

$$u(t,\varepsilon)=W(t,0,\varepsilon)\varphi+\varepsilon^{-1}\int_0^t W(t,s,\varepsilon)f(s)\,ds, \tag{5}$$

где $W(t, s, \varepsilon)$ — эволюционный оператор равномерно ограниченный по t, s при каждом $\varepsilon>0$ и является решением задачи

$$\varepsilon W_t-A(t)W=0, \quad W(0, 0, \varepsilon)=E. \tag{6}$$

Условие С. Ортонормированные собственные функции $\{\varphi_i(t)\}$ оператора $A(t)$ при каждом $t \in [0, T]$ образуют полную систему в H. Ряды следующего типа допускают сильное дифференцирование по t:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j\neq i}\prod_{n=0}^{K}(\varphi_{j_n}', \varphi_{j_{n+1}})(\lambda_i(t)-\lambda_j(t))^{-1}\varphi_{j_{K+1}}(t), \tag{7}$$

где K будет определено ниже.

При каждом $\varepsilon>0$ рассмотрим многообразие H^τ функций $\tilde{u}$ счетного числа переменных $\tau=(\tau_1, \tau_2, \ldots)$ и переменной t. Функции $\tilde{u}(t, \tau, \varepsilon)$ таковы, что если $u(t, \varepsilon)$ — решение задачи (1), то

$$\tilde{u}(t,\psi_i(t,\varepsilon))=u(t,\varepsilon), \quad \psi_i(t,\varepsilon)=\varepsilon^{-1}\int_0^t \lambda_i(s)\,ds. \tag{8}$$

Обозначим далее через H_τ функции из H^τ, представимые в виде

$$\tilde{u}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}e^{\tau_i}u_{ij}(t)\varphi_j(t)+\sum_{i=1}^{\infty}u_i(t)\varphi_i(t). \tag{9}$$

На линейном многообразии H_τ введем скалярное произведение. Если $\tilde{u}, \tilde{v} \in H_\tau$, то

$$\langle\tilde{u},\tilde{v}\rangle=\sum_{i,j=1}^{\infty}u_{ij}(t)v_{ij}(t)+\sum_{i=1}^{\infty}u_i(t)v_i(t), \tag{10}$$

где $\tilde{u}$ определена формулой (9), а $\tilde{v}$ также принадлежит H_τ, т. е.

$$\tilde{v}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}e^{\tau_i}v_{ij}(t)\varphi_j(t)+\sum_{i=1}^{\infty}v_i(t)\varphi_i(t). \tag{11}$$

Если $u(t, \varepsilon)$ есть решение задачи (1), то с учетом соотношения (8) и дифференцирования, получим

$$u_t=\tilde{u}_t+\varepsilon^{-1}D_\tau\tilde{u}, \quad D_\tau \equiv \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i(t)\frac{\partial}{\partial\tau_i}. \tag{12}$$

Поставим следующую задачу для функции $\tilde{u}$, исходя из задачи (1) и соотношения (12):

$$\tilde{L}_\varepsilon\tilde{u} \equiv \varepsilon\tilde{u}_t+D_\tau\tilde{u}-A(t)\tilde{u}=f(t), \quad \tilde{u}(0, 0, \varepsilon)=\varphi. \tag{13}$$

Пусть оператор $A(t)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(A(t)\tilde{u}(t,\tau,\varepsilon))=A(t)\tilde{u}(t,\tau,0). \tag{14}$$

Для дифференциального оператора условие (14) выполняется. В случае эллиптического оператора условие (14) проверено в ([3]). Для интегрального оператора $A(t)$ регуляризация задачи (1) проводится иначе.

Определяем решение задачи (13) в виде ряда

$$\tilde{u}=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i}u_i(t,\tau). \tag{15}$$

Подставим ряд (15) в задачу (13) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Получим для определения коэффициентов ряда (15):

$$L_0u_0=(D_\tau-A(t))u_0=f(t),\qquad u_0(0,\ 0)=\varphi, \tag{16}$$

$$L_0u_i=-\partial u_{i-1}/\partial t;\qquad u_i(0,0)=0,\quad i=1,\ 2,\dots,\ k. \tag{17}$$

Решение задачи (16), (17) будем искать в пространстве H_τ. Тогда решение задачи (16) необходимо представлять в виде

$$u_0=\sum_{i=1}^{\infty}e^{\tau_i}c_i^0(t)\varphi_i(t)+h_0(t),\qquad h_0(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(A^{-1}(t)f(t),\varphi_i)\varphi_i}{\lambda_i(t)} \tag{18}$$

Однозначная разрешимость задач (16), (17) будет вытекать из следующих теорем. Рассмотрим задачу

$$L_0u=(D_\tau-A(t))u=f(t,\ \tau),\qquad u(0,\ 0)=\varphi. \tag{19}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* A, B, C *и* (14). *Тогда, если $f(t,\ \tau)\in H_\tau$, то для разрешимости задачи* (19) *в пространстве H_τ необходимо и достаточно, чтобы $f(t,\ \tau)$ была ортогональна ядру сопряженного оператора L_0^*.*

Теорема 2. *Решение задачи* (19) *из пространства H_τ единственно, если кроме условий теоремы* 1 *и $\varphi_i(t)\in C[0,T,H]$ выполняется условие*

$$\langle\partial u/\partial t,\ \eta_i\rangle=0,\qquad i=1,\ 2,\dots,\ k, \tag{20}$$

где $\eta_i\in\operatorname{Ker}L_0^*$, u — решение задачи (20) *в пространстве H_τ.*

Для определения $c_i^0(t)$ применим теорему 1 к задаче (17) при $i=1$:

$$Bc_i^0\equiv dc_i^0/dt+(\varphi_i',\ \varphi_i)c_i^0=0,\qquad c_i^0(0)=(\varphi-A^{-1}(0)f(0),\ \varphi_i(0)). \tag{21}$$

Тем самым функция $u_0(t,\ \tau)$ определяется однозначно. Из (17) определим u_1:

$$u_1=\sum_{j\neq i}\sum_{i=1}^{\infty}e^{\tau_i}c_{ij}^{(1)}(t)\varphi_i(t)+\sum_{i=1}^{\infty}e^{\tau_i}c_{ii}^{(1)}(t)\varphi_i(t)+h_1(t); \tag{22}$$

$$c_{ij}^{(1)}(t)=(\lambda_j(t)-\lambda_i(t)^{-1}(\varphi_{i1}'\varphi_j)c_i^0(t),\qquad h_1(t)=A^{-1}(t)h_0(t). \tag{23}$$

Снова к задаче (17) при $i=2$ применим теорему 1. Получим

$$Bc_{ii}^{(1)}=-\sum_{j\neq i}c_{ij}^{(1)}(t)(\varphi_{i1}'\varphi_j),\qquad c_{ii}^{(1)}\ (0)=-(h_1(0),\varphi_i(0))-\sum_{j\neq i}c_{ij}^{(1)}(0). \tag{24}$$

Применяя индукцию, можно получить дальнейшие коэффициенты ряда (15). Пусть найдено $u_{l-1}(t,\ \tau)$,

$$u_{l-1}=\sum_{j\neq i}\sum_{i=1}^{\infty}e^{\tau_i}c_{ij}^{(l-1)}(t)\varphi_j(t)+\sum_{i=1}^{\infty}e^{\tau_i}c_{ii}^{(l-1)}(t)\varphi_i(t)+h_{l-1}(t). \tag{25}$$

Если подставить (25) в (17) при $i=l$ и применить теорему 1, получим

$$Bc_{ii}^{(l-1)}=-\sum_{j\neq i} c_{ij}^{(l-1)}(t)(\varphi_i,\varphi_j'), \quad c_{ii}^{(l-1)}(0)=-(h_{l-1}(0),\varphi_i(0))-\sum_{j\neq i} c_{ij}^{(l-1)}(0). \tag{26}$$

С учетом последних выражений определим из (17) $u_l(t,\tau)$:

$$u_l=\sum_{i=1}^{\infty} e^{\tau_i}c_{ii}^{(l)}(t)\varphi_i(t)+\sum_{j\neq i}\sum_{i=1}^{\infty} e^{\tau_i}c^{(l)}(t)\varphi_j(t)+h_l(t), \tag{27}$$

$$h_l(t)=A^{-1}(t)h_{l-1}'(t), \quad c_{ij}^{(l)}(t)=c_{ii}^{(i-1)}(t)(\varphi_i',\varphi_j)+\frac{dc_{ij}^{(l-1)}}{dt}+\sum_{j\neq i}\frac{c_{ij}^{(l-1)}(\varphi_j',\varphi_i)}{\lambda_i(t)-\lambda_j(t)}. \tag{28}$$

Таким образом, коэффициенты ряда (15) в пространстве определены однозначно. Обозначим остаточный член ряда (15) через $\varepsilon^{k+1}\tilde{R}_{k+1}(t,\tau,\varepsilon)$. Тогда

$$\tilde{u}=u_{\varepsilon k}(t,\tau)+\varepsilon^{k+1}\tilde{R}_{k+1}(t,\tau,\varepsilon), \quad u_{\varepsilon k}=\sum_{i=0}^{k}\varepsilon^i u_i(t,\tau). \tag{29}$$

Функции $u_i(t,\tau)$ определены выражениями (18), (22), (25), (27).

Согласно методу регуляризации, если сделать замену переменных в формуле (29):

$$\tau_i=\varepsilon^{-1}\int_0^t \lambda_i(s)\,ds\equiv\psi_i(t,\varepsilon), \quad i=1,2,\ldots,$$

получим решение задачи (1) в виде

$$u(t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{k}\varepsilon^i u_i(t,\psi_j(t,\varepsilon))+\varepsilon^{k+1}R_{k+1}(t,\varepsilon). \tag{30}$$

Воспользовавшись (30) и задачами для определения $u_i(t,\tau)$, получим

$$L_\varepsilon R_{k+1}=h(t,\varepsilon), \quad R_{k+1}(0,\varepsilon)=0, \tag{31}$$

где $\|h(t,\varepsilon)\|$ равномерно ограничены по ε.

Теорема 3. *Пусть имеют место условия* А, В, С *и* (14). *Существуют сильные производные* $\dfrac{d^{k+1}}{dt^{k+1}}A^{-1}(t)$ *и сильно непрерывны*

$$\{\varphi_i(t)\}\in C^{k+1}[0,T,H], \quad f(t)\in C^{k+2}[0,T,H],$$

k определено выражением (30).

Тогда для решения задачи (1) *имеет место формула* (30), *где* $R_{k+1}(t,\varepsilon)$ *допускает оценку* $\|R_{k+1}(t,\varepsilon)\|\leqslant C$, *$C$ не зависит от* ε.

Заметим, что методом возмущений нами рассмотрен также случай, когда оператор $A(t)$ имеет чисто мнимый спектр, а также случай, когда спектр находится в замкнутой левой полуплоскости.

В заключение приношу искреннюю благодарность С. Ломову за постановку задачи и весьма ценные советы.

Московский энергетический институт

Поступило 3 VII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *С. А. Ломов*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 32, № 3 (1968). [2] *С. А. Ломов*, ДАН, т. 212, № 1 (1973). [3] *С. А. Ломов*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 36, № 3 (1972). [4] *В. А. Треногин*, УМН, т. 25, 4 (154) (1970). [5] *В. А. Треногин*, ДАН, т. 152, № 1 (1963). [6] *С. Г. Крейн*, Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М., 1967. [7] *Ю. А. Далецкий, М. Г. Крейн*, Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., 1970. [8] *К. Иосида*, Функциональный анализ, М., 1967. [9] *А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов*, Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений, М., 1973. [10] *В. Вазов*, Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, М., 1968. [11] *A. Nayfeh*, Perturbation Methods, N. Y., 1973.