Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 1

УДК 517.947.44

МАТЕМАТИКА

Л. А. МУРАВЕЙ

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРОДОЛЖЕНИИ ФУНКЦИЙ ГРИНА ВНЕШНИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 20 VI 1974)

Пусть Ω — неограниченная область плоскости E_2, границей которой является замкнутая, дважды гладкая кривая Γ. Обозначим через $v(x, k)$, $x=(x_1, x_2)$, $\operatorname{Im} k\geqslant 0$, $k\neq 0$, решение в Ω уравнения Гельмгольца

$$\Delta v+k^2v=f(x), \tag{1}$$

удовлетворяющее условию излучения Зоммерфельда на бесконечности

$$\partial v/\partial |x|-ikv=e^{-\operatorname{Im} k|x|}o(|x|^{-1/2}) \tag{2}$$

и одному из граничных условий

$$l_{\mathrm{I}}v=v|_\Gamma=\varphi(x), \tag{3_{I}}$$

$$l_{\mathrm{II}}v=\partial v/\partial n|_\Gamma=\varphi(x), \tag{3_{II}}$$

$$l_{\mathrm{III}}v=\partial v/\partial n+g(x)v|_\Gamma=\varphi(x), \tag{3_{III}}$$

$$l_{\mathrm{IV}}v=\partial v/\partial n-ikg(x)v|_\Gamma=\varphi(x), \tag{3_{IV}}$$

где $\Delta=\partial^2/\partial x_1^2+\partial^2/\partial x_2^2$ и n — вектор внешней по отношению к Ω единичной нормали к контуру Γ; функция $f(x)$ предполагается гладкой и финитной в Ω, а функции $g(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывными на Γ.

Однородное уравнение (1) ($f=0$) будем обозначать через (1_0), а однородные условия (3_{I})—(3_{IV}) ($\varphi=0$) — соответственно через ($3_{\mathrm{I},0}$)—($3_{\mathrm{IV},0}$).

Пусть $G_{\mathrm{I}}(x, y, k)-G_{\mathrm{IV}}(x, y, k)$, $\operatorname{Im} k\geqslant 0$, $k\neq 0$,— функции Грина задач (1), (2), ($3_{\mathrm{I},0}$)—(1), (2), ($3_{\mathrm{IV},0}$) соответственно; функции $\partial G_{\mathrm{I}}(x, y, k)/\partial n_y$, $G_{\mathrm{II}}(x, y, k)-G_{\mathrm{IV}}(x, y, k)$, $y\in\Gamma$, будем обозначать соответственно через $G_{\Gamma,\mathrm{I}}-G_{\Gamma,\mathrm{IV}}$ (функция $G_{\Gamma,\alpha}$, $\alpha=\mathrm{I}-\mathrm{IV}$, является функцией Грина задачи (1_0), (2), (3_α)).

В работе (1) доказано существование функций Грина задач (1), (2), (3_{I}) и (1), (2), (3_{II}).

Через $K^+(\varkappa, \varepsilon, \beta)$ и $K^-(\varkappa, \varepsilon, \beta)$ обозначим следующие области комплексной k-плоскости:

$$K^+(\varkappa, \varepsilon, \beta)=\{k:\ \varkappa<|k|,\ -\beta|k|^{-2/3}<\arg k<\pi/2-\varepsilon\},$$

$$K^-(\varkappa, \varepsilon, \beta)=\{k:\ \varkappa<|k|,\ \pi/2+\varepsilon<\arg k<\pi+\beta|k|^{-2/3}\},$$

где $\varkappa$, ε, β неотрицательны, $\varepsilon<\pi/2$.

Обозначим через Ω_R область $\Omega\cap\{|x|<R\}$, где $R\geqslant R'>0$ и R' таково, что $\Gamma\subset\Omega_{R'}$. Будем предполагать, что контур Γ имеет положительную кривизну, а функция $g(x)$ в условии (3_{IV}) непрерывно дифференцируема и неотрицательна.

Имеет место следующая

Теорема. *Для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\varkappa>0$, что для любого $k\in\overline{K}^\pm(\varkappa, \varepsilon, 0)$ существует и единственна функция Грина $G_{\Gamma,\alpha}$ задачи*

(1_0), (2), (3_α), $\alpha=\mathrm{I-IV}$, *и эта функция аналитична по k в областях $K^\pm(\varkappa, \varepsilon, 0)$.*

Существует такое $\beta>0$, что функции $G_{\Gamma,\alpha}$, $\alpha=\mathrm{I-IV}$, аналитически продолжаются в области $K^\pm(\varkappa, \varepsilon, \beta)$ и при этом имеют место оценки

$$|G_{\Gamma,\mathrm{I}}(x,y,k)|\leqslant C_\mathrm{I}\left(\frac{|k|^{1/2}}{|x-y|^{1/2}}+\frac{1}{|x-y|}\right)\exp\{\operatorname{Im}k|x-y|+D|\operatorname{Im}k|\},$$

$$y\in\Gamma,\quad x\in\overline{\Omega}_R,\quad k\in\overline{K}^\pm(\varkappa,\varepsilon,\beta),$$

а при $\alpha=\mathrm{II-IV}$

$$|G_{\Gamma,\alpha}(x,y,k)|\leqslant C_\alpha\frac{1}{(|k||x-y|)^{1/2}}\exp\{\operatorname{Im}k|x-y|+D|\operatorname{Im}k|\},$$

$$y\in\Gamma,\quad x\in\overline{\Omega}_R,\quad k\in\overline{K}^\pm(\varkappa,\ \varepsilon,\ \beta).$$

Здесь R произвольно $(R\geqslant R')$, положительные постоянные β и D зависят только от Γ, а $\varkappa$ — от ε, Γ и в случае задач (1_0), (2), (3_{III}) и (1_0), (2), (3_{IV}) от $\|g\|_{C(\Gamma)}$; положительные постоянные C_I и C_{II} зависят от Γ и R, а положительные постоянные C_{III} и C_{IV} — от Γ, R и $\|g\|_{C(\Gamma)}$ (при этом зависимость постоянных $\varkappa$, C_{III} и C_{IV} от $\|g\|_{C(\Gamma)}$ такова, что они не возрастают при убывании $\|g\|_{C(\Gamma)}$).

Следствие. *Для любого $k\in\overline{K}^\pm(\varkappa, \varepsilon, 0)$ существует и единственна функция Грина G_α задачи (1), (2), $(3_{\alpha,0})$ $(\alpha=\mathrm{I-IV})$ и эта функция аналитична в областях $K^\pm(\varkappa, \varepsilon, 0)$.*

Функции G_α, $\alpha=\mathrm{I-IV}$, аналитически продолжаются в области $K^\pm(\varkappa, \varepsilon, \beta)$ и при этом имеют место оценки

$$\left|G_\alpha(x,y,k)+\frac{i}{4}H_0^{(1)}(k|x-y|)\right|\leqslant\frac{C_\alpha}{|x-y|^{1/2}}\exp\{\operatorname{Im}k(|x|+|y|)+D|\operatorname{Im}k|\},$$

$$y\in\overline{\Omega_R},\quad x\in\overline{\Omega},\quad k\in\overline{K}^\pm(\varkappa,\ \varepsilon,\ \beta),$$

где $-{}^1/_4 iH_0^{(1)}(k|x-y|)$ — фундаментальное решение уравнения Гельмгольца ($H_0^{(1)}$ — первая функция Ганкеля нулевого порядка).

Для второй и третьей краевых задач это утверждение (с менее точными оценками) было доказано в ([2-5]). В ряде работ, например ([6-9]), установлены некоторые оценки функций G_I и G_{II} при больших по модулю вещественных k.

Для доказательства теоремы строятся функции $L_\alpha(x, y, k)$, $y\in\Gamma$, $x\in\Omega$, $\alpha=\mathrm{I-IV}$, аналитические в областях $K^\pm(\varkappa, \varepsilon, \beta)$, удовлетворяющие в Ω уравнению (1_0), условию излучения (2) при $k\in K^\pm(\varkappa, \varepsilon, 0)$ и такие, что для любой $\varphi\in C(\Gamma)$ имеет место равенство

$$\lim_{\tau\to+0}\int_\Gamma l_\alpha L_\alpha(x-\tau n_x,y,k)\varphi(y)\,ds_y=\varphi(x)+\int_\Gamma M_\alpha(x,y,k)F(y)\,ds_y,\tag{4}$$

где $M_\alpha(x, y, k)$, $\alpha=\mathrm{I-IV}$, — непрерывные по $(x, y)\in\Gamma\times\Gamma$, аналитические в $K^\pm(\varkappa, \varepsilon, \beta)$ функции, для которых при $k\in\overline{K}^\pm(\varkappa\ \varepsilon, \beta)$ имеют место оценки

$$\max_{x\in\Gamma}\int_\Gamma|M_\alpha(x',x,k)|\,ds_{x'}\leqslant\mu<1.\tag{5}$$

Функции $G_{\Gamma,\alpha}(x, y, k)$, $\alpha=\mathrm{I-IV}$, ищутся в виде

$$G_{\Gamma,\alpha}(x,y,k)=L_\alpha(x,y,k)+\int_\Gamma L_\alpha(x',x,k)\nu_\alpha(x',y,k)\,ds_{x'},$$

где $\nu_\alpha(x, y, k)$ — неизвестные (непрерывные по x, $y\in\Gamma$) функции. В силу (4) функция ν_α, $\alpha=\mathrm{I}-\mathrm{IV}$, удовлетворяет интегральному уравнению

$$\nu_\alpha(x,y,k)+\int\limits_\Gamma M_\alpha(x',x,k)\nu_\alpha(x',y,k)\,ds_{x'}=M_\alpha(x,y,k). \qquad (6)$$

При любом $y\in\Gamma$ уравнения (6) однозначно разрешимы (в $C(\Gamma)$) при всех $k\in\overline{K}^\pm(\varkappa,\ \varepsilon,\ \beta)$, так как из оценок (5) следует, что нормы интегральных операторов (из $C(\Gamma)$ в $C(\Gamma)$) в (6) меньше единицы.

Для больших по модулю вещественных k в случае второй краевой задачи интегральное уравнение типа (6) рассматривалось в [7].

Заметим, что нормы интегральных операторов (рассматриваемых, например, из $C(\Gamma)$ в $C(\Gamma)$) в уравнениях, с помощью которых в [1] установлено существование функций Грина первой и второй краевых задач, неограниченны при $|k|\to\infty$ для k из $K^\pm(\varkappa,\varepsilon,0)$ (и, тем более, для k из $K^\pm(\varkappa,\ \varepsilon,\ \beta)$).

Построение функций L_α, $\alpha=\mathrm{I}-\mathrm{IV}$, а также установление необходимых для доказательства теоремы оценок существенно использует исследование функций Грина задач (1_0), (2), (3_α), $\alpha=\mathrm{I}-\mathrm{IV}$, во внешности круга (такие построения в случае второй и третьей краевых задач проведены в [3, 5]).

Из теоремы вытекает, что существуют такие положительные числа $\beta(\Gamma)$ и $\varkappa(\Gamma)$ (в случае третьей и четвертой краевых задач $\varkappa$ зависит также от $\|g\|_{C(\Gamma)}$), что в областях $\tilde{K}^+(\varkappa)=\{-\pi/2<\arg k<\pi/2\}\cap\{\operatorname{Re}k>\varkappa\}$ и $\tilde{K}^-(\varkappa)=\{\pi/2<\arg k<3\pi/2\}\cap\{\operatorname{Re}k>-\varkappa\}$ полюса функций Грина первой, второй (для второй краевой задачи это утверждается также в [10]), третьей и четвертой (при $g\geqslant0$) краевых задач расположены ниже кривой $Z=\{k\colon \operatorname{Im}k=-\beta|\operatorname{Re}k|^{1/3},\ -\infty<\operatorname{Re}k<\infty\}$.

Как показывает исследование функций Грина соответствующих задач во внешности круга, существует такое положительное число $\tilde\beta$, что при любых ε и $\varkappa>0$ эти функции имеют последовательности полюсов, расположенных в областях $K^\pm(\varkappa,\ \varepsilon,\ \tilde\beta)\diagdown\overline{K}^\pm(\varkappa,\ \varepsilon,\ 0)$.

Заметим, что условие неотрицательности функции g из (3_{IV}) является существенным. Без ограничений на знак функции g можно утверждать лишь, что в областях $\tilde{K}^\pm(\varkappa)$ полюса функции Грина четвертой краевой задачи расположены ниже прямой $\{k\colon \operatorname{Im}k=-\beta,\ -\infty<\operatorname{Re}k<\infty\}$. Действительно, если g в условии (3_{IV}) — произвольное вещественное число из интервала $(-1,\ 0)$, то функция Грина задачи (1_0), (2), (3_{IV}) во внешности круга единичного радиуса имеет в областях $\tilde{K}^\pm(0)$ последовательность полюсов

$$k_m^\pm=\frac{\pm m}{\sqrt{1-g^2}}+\frac{i}{2g(1-g^2)}+\tilde{k}_m^\pm,\qquad m=1,2,\ldots,$$

где $|\tilde{k}_m^\pm|<C(g)/m$ (при достаточно больших m полюса $k_m^\pm$ попадают в области $K^\pm(\varkappa,\ \varepsilon,\ \beta)\diagdown\overline{K}^\pm(\varkappa,\ \varepsilon,\ 0)$, каковы бы ни были $\varkappa,\ \varepsilon,\ \beta>0$).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
19 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *И. Н. Векуа,* Тр. Тбилисск. матем. инст., т. 12, 105 (1943). [2] *Л. А. Муравей,* ДАН, т. 193, № 5, 996 (1970). [3] *Л. А. Муравей,* Дифференциальные уравнения, т. 6, № 12, 2248 (1970). [4] *Л. А. Муравей,* ДАН, т. 205, № 4, 780 (1972). [5] *Л. А. Муравей,* Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, т. 126, 73 (1973). [6] *В. С. Буслаев,* Вестн. Ленингр. унив., т. 13 (1962). [7] *F. J. W. Ursell,* Proc. Cambridge Phil. Soc., v. 53, № 1, 115 (1957). [8] *В. М. Бабич, И. В. Олимпиев,* III Всесоюзн. симп. по дифракции волн, Тбилиси, 1964, Реф. докл. [9] *R. Grimshaw,* Comm. Pure Appl. Math., v. 19, 167 (1966). [10] *В. М. Бабич,* Сборн. Теория функций, функциональн. анализ и их приложения, т. 23, 151 (1966).