

М. А. НАЙМАРК

ОБ ОДНОРОДНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ЛОКАЛЬНО-КОМПАКТНОЙ
ГРУППЫ, ДЕЙСТВУЮЩИХ В ПАРЕ ДВОЙСТВЕННЫХ
ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком С. М. Никольским 17 VI 1974)

1. Представления в паре двойственных пространств и связанные с ними интегралы. Пусть E, F — пара векторных пространств, находящихся в действительности (см., например, (1), гл. IV) относительно невырожденной билинейной формы (ξ, η) (кратко, пара $P = \{E, F, (\xi, \eta)\}$). Мы будем считать E и F наделенными топологиями $\sigma(E, F)$ и $\sigma(F, E)$ соответственно и все топологические свойства в E, F (например, замкнутость, непрерывность отображения в E или F и т. д.), если это не оговорено, мы будем понимать в смысле σ -топологий * в E и F .

Всюду в этой статье G — локально-компактная группа, U — ее компактная подгруппа, $c: u \rightarrow c(u)$ — неприводимое унитарное представление группы U , $c_{ij}(u)$ — матричные элементы $c(u)$ в каком-нибудь фиксированном ортонормальном базисе.

Представлением группы G в паре $P = \{E, F, (\xi, \eta)\}$ называется пара отображений $T: g \rightarrow T(g)$, $\hat{T}: g \rightarrow \hat{T}(g)$ группы G в группы линейных операторов $T(g)$ в E и $\hat{T}(g)$ в F , удовлетворяющих, кроме обычных условий,

1) $T(e) = 1_E$, $T(g_1 g_2) = T(g_1) T(g_2)$, $\hat{T}(e) = 1_F$, $\hat{T}(g_1 g_2) = \hat{T}(g_2) \hat{T}(g_1)$ ($1_E, 1_F$ — единичные операторы в E и F соответственно),
еще условиям

$$2) (T(g)\xi, \eta) = (\xi, \hat{T}(g)\eta),$$

3) $\{g, \xi\} \rightarrow T(g)\xi$, $\{g, \eta\} \rightarrow \hat{T}(g)\eta$ являются непрерывными отображениями топологических произведений $G \times E$, $G \times F$ в E и F соответственно. Условие 2) означает, что **

$$\hat{T}(g) = (T(g))'. \quad (1,1)$$

Отображение $g \rightarrow \hat{T}(g)$ называют обычно антипредставлением группы G .

Представление T в пространстве E называется неприводимым, если в E не существует замкнутого подпространства, инвариантного относительно E и отличного от (0) и всего E . Аналогично определяется неприводимость антипредставления \hat{T} в F . Неприводимость T в E эквивалентна неприводимости \hat{T} в F .

Представление T, \hat{T} в паре $P = \{E, F, (\xi, \eta)\}$ называется неприводимым, если T неприводимо в E , а значит, \hat{T} неприводимо в F .

Обозначим через X алгебру всех непрерывных функций $x = x(g)$ на G с компактным носителем с обычным (поточечным) определением сложения и умножения на число и с умножением — сверткой.

* Разумеется, эти σ -топологии можно заменить любыми другими топологиями, согласующимися с двойственностью между E и F .

** A' обозначает транспонированный к A оператор, определенный формулой $(A\xi, \eta) = (\xi, A'\eta)$.

Следующие предложения I—IV позволяют распространить теорию однородных представлений (см. (2-4)) на представления в паре $P = \{E, F, (\xi, \eta)\}$ без предположений о полноте E и F в каком-либо смысле.

Предложение I. Пусть $x \in X$; тогда для каждого $\xi \in E$ существует такой вектор $\xi_1 \in E$, что

$$\int x(g) (T(g)\xi, \eta) dg = (\xi_1, \eta) \quad \text{для всех } \eta \in F. \quad (1,2)$$

Таким образом определенный вектор ξ_1 обозначим $\int x(g) T(g)\xi dg$, так что

$$\int x(g) (T(g)\xi, \eta) dg = \left(\int x(g) T(g)\xi dg, \eta \right).$$

Меняя в предыдущем предложении E и F ролями, заключаем, что для каждого $\eta \in F$ существует такой вектор $\eta_1 \in F$, что

$$\int x(g) (\xi, \hat{T}(g)\eta) dg = (\xi, \eta_1).$$

Этот вектор η_1 обозначим $\int x(g) \hat{T}(g)\eta dg$, так что

$$\left(\xi, \int x(g) \hat{T}(g)\eta dg \right) = \int x(g) (\xi, \hat{T}(g)\eta) dg.$$

Очевидно, отображение $\xi \rightarrow \xi_1$ линейно, следовательно, определяет линейный оператор в E , который обозначим $\int x(g) T(g) dg$, или сокращенно $T(x)$.

Аналогично определяется линейный оператор $\hat{T}(x) = \int x(g) \hat{T}(g) dg$ в F по формуле

$$\hat{T}(x)\eta = \left(\int x(g) \hat{T}(g) dg \right) \eta = \int x(g) \hat{T}(g)\eta dg.$$

Предложение II. Для каждой функции $x \in X$ операторы $T(x)$ и $\hat{T}(x)$ непрерывны в $\sigma(E, F)$ - и $\sigma(F, E)$ -топологиях соответственно и $\hat{T}(x) = (T(x))'$.

Предложение III. Соответствие $x \rightarrow T(x)$ есть гомоморфизм алгебры X в алгебру всех непрерывных операторов в E .

Аналогично справедливо

Предложение IV. Соответствие $x \rightarrow \hat{T}(x)$ есть антигомоморфизм алгебры X в алгебру всех непрерывных операторов в F .

2. Определение однородного представления. Для данного представления T, \hat{T} группы G в P положим

$$T_j^c = \dim c \int \overline{c_{ji}(u)} T(u) du, \quad \hat{T}_j^c = \dim c \int \overline{c_{ji}(u)} \hat{T}(u) du. \quad (2,1)$$

Согласно предложениям I и II, примененным к представлению $u \rightarrow T(u)$ (антипредставлению $u \rightarrow \hat{T}(u)$) группы U и к непрерывной функции $u \rightarrow c_{ji}(u)$ (вместо $x(g)$), интегралы в правой части (2,1) существуют и T_j^c, \hat{T}_j^c — непрерывные операторы в E и F . Легко также проверить, что T_j^c — проектор в E и что $\dim (T_j^c E) = k(T, U, c)$, что $k(T, U, c)$ — кратность, с которой c содержится в представлении $u \rightarrow T(u)$.

Для произвольных множеств $M \subset E, N \subset F$ обозначим через $[M]$ и $[N]$ замкнутые линейные оболочки множеств M и N в топологиях $\sigma(E, F)$ и $\sigma(F, E)$ соответственно.

Представление T группы G в E называется квазиоднородным относительно U, c , если *

$$[T(g)T_j^c E, g \in G] = E.$$

* Условимся всюду писать $[\cdot]$ вместо $\{\{\cdot\}\}$; в частности, $[T(g)T_j^c E, g \in G]$ вместо $\{\{T(g)T_j^c E, g \in G\}\}$.

Аналогично антипредставление \hat{T} группы G в F называется квази-однородным относительно U , с, если $[\hat{T}(g)T_j^c F, g \in G] = F$.

Представление T, \hat{T} в паре $P = \{E, F, (\xi, \eta)\}$ называется однородным относительно U , с, если T квазиоднородно в E относительно U , с и \hat{T} квазиоднородно относительно U , с в F .

3. Критерии неприводимости и полной неприводимости.

Теорема 1. Пусть T, \hat{T} — представление группы G в паре $P = \{E, F, (\xi, \eta)\}$, однородное относительно U , с. Если выполнено хотя бы одно из условий

$$1) \dim(T_j^c E) = 1;$$

$$2) \text{ для каждого отличного от нуля вектора } \xi \in T_j^c E$$

$$[T_j^c T(g)\xi, g \in G] = T_j^c E,$$

то T, \hat{T} неприводимо. Условие 2) также необходимо для неприводимости представления T, \hat{T} .

Обозначим через $C(E), C(F)$ алгебры всех непрерывных операторов в E и F соответственно и наделим $C(E)$ и $C(F)$ локально-выпуклыми топологиями, определенными системами полунорм

$$p_{\xi, \eta}(A) = |(A\xi, \eta)|, \quad q_{\xi, \eta}(B) = |(\xi, B\eta)|, \\ A \in C(E), \quad B \in C(F), \quad \xi \in E, \quad \eta \in F.$$

Обозначим далее через \mathfrak{A} линейную оболочку всех $T(g), g \in G$, а через $\overline{\mathfrak{A}}$ — замыкание \mathfrak{A} в $C(E)$. Аналогично, обозначим через \mathfrak{B} линейную оболочку всех $T(g), g \in G$, а через $\overline{\mathfrak{B}}$ — замыкание \mathfrak{B} в $C(F)$.

Представление T, \hat{T} в паре $P = \{E, F, (\xi, \eta)\}$ называется вполне неприводимым, если для этого представления $\overline{\mathfrak{A}} = C(E)$ и, следовательно, $\overline{\mathfrak{B}} = C(F)$. Ясно, что из вполне неприводимости следует неприводимость; обратное, вообще говоря, неверно.

Теорема 2. Пусть G — локально-компактная группа, U — ее компактная подгруппа со счетной базой, T, \hat{T} — неприводимое представление группы G в паре $P = \{E, F, (\xi, \eta)\}$. Если

$$\dim(T_j^c E) = k(T, U, c) < \infty$$

для каждого неприводимого представления с группы U , то T, \hat{T} вполне неприводимо.

Комбинируя теоремы 1 и 2, приходим к следующему результату:

Теорема 3. Пусть G — локально-компактная группа, U — ее компактная подгруппа со счетной базой, c^0 — фиксированное неприводимое представление группы U , и T, \hat{T} — представление группы G в паре $P = \{E, F, (\xi, \eta)\}$, однородное относительно U , c^0 и удовлетворяющее условию

1) $\dim(T_j^c E) = k(T, U, c) < \infty$ для каждого неприводимого представления с группы U , и, по крайней мере, одному из условий

$$2) \dim(T_j^c E) = k(T, U, c^0) = 1,$$

2') для каждого $\xi \neq 0$ из $T_j^c E$

$$[T_j^c T(g)\xi, g \in G] = T_j^c E.$$

Тогда T, \hat{T} вполне неприводимо в P .

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
11 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Н. Бурбаки, Топологические векторные пространства, ИЛ, 1959. ² М. А. Наймарк, ДАН, т. 205, 783 (1972). ³ М. А. Наймарк, ДАН, т. 205, 1077 (1972). ⁴ М. А. Наймарк, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 36, 5 (1972).