Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 1

УДК 517.12:519.51

МАТЕМАТИКА

Н. Н. НЕПЕЙВОДА

ЯЗЫК Δ С ИНТУИЦИОНИСТСКИМИ СВЯЗКАМИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 7 VI 1974)

Эта работа продолжает исследования, начатые в статьях ([1–4]). Терминология и обозначения статей ([2–4]) используются без дополнительных объяснений.

Присоединим к языку Δ связки & и $\vee$ и квантор $\exists$, которые будем интерпретировать «конструктивно». Получившийся язык будем называть языком Ω.

Дополним определение реализуемости и виртуальной реализуемости статьи ([2]) следующими пунктами:

6) $n[R]_{\alpha\oplus 1}A \mathbin{\&} B \Leftrightarrow (n)_1[R]_\alpha A \mathbin{\dot{\&}} (n)_2[R]_\alpha B.$

6а) $n[CR]_{\alpha\oplus 1}A \mathbin{\&} B \Leftrightarrow (n)_1[CR]_\alpha A \mathbin{\dot{\&}} (n)_2[CR]_\alpha B.$

7) $n[R]_{\alpha\oplus 1}A \vee B \Leftrightarrow ((n)_1 \dot{=} 0 \mathbin{\dot{\&}} (n)_2[R]_\alpha A) \dot{\vee} ((n)_1 \dot{\neq} 0 \mathbin{\dot{\&}} (n)_2[R]_\alpha B).$

7а) $n[CR]_{\alpha\oplus 1}A \vee B \Leftrightarrow ((n)_1 \dot{=} 0 \mathbin{\&} (n)_2[CR]_\alpha A) \dot{\vee}$
$\dot{\vee} ((n)_1 \dot{\neq} 0 \mathbin{\dot{\&}} (n)_2[CR]_\alpha B).$

8) $n[R]_{\alpha\oplus 1}\exists XA \Leftrightarrow (n)_2[R]_\alpha A(X|(n)_1).$

8а) $n[CR]_{\alpha\oplus 1}\exists XA \Leftrightarrow (n)_2[CR]_\alpha A(X|(n)_1).$

Интуиционистская логика в сочетании с бессмысленными утверждениями языка Ω дает весьма сильные эффекты неполноты. В частности, может не быть всегда осмысленной и такая формула языка Ω, для которой верно $\forall x \neg\neg A$.

Лемма 1. *Пусть*

$$A \rightleftharpoons (J \supset \exists y T_1(x, x, y) \vee \forall y \neg T_1(x, x, y)),$$

где J — бессмысленная формула вида $(n \in n)$, построенная в ([1]).

Тогда

$$\models \forall x \neg\neg A,$$

но формула $\forall x(A \supset A)$ является бессмысленной.

Определим для языка Ω аналоги формул языка Δ.

Определение 1. Нормальная формула языка Ω.

а) Элементарные формулы нормальны.

б) Если A нормальна, то и $\forall XA$ нормальна.

в) Если A нормальна, B нормальна, то $(A \& B)$, $(A \supset B)$ также нормальны.

г) Если $\rho^x \llcorner A \lrcorner$ при всех x имеет вид $(t \in Q)$ или нормальна, то и A нормальна.

Определение 2. Формула A регулярна, если A имеет вид $\exists XB$, где B — нормальная формула.

В отличие от арифметики, понятия нормальной и регулярной формулы языка Ω неразрешимы.

Определение 3. Пусть $\ulcorner M \urcorner$ обозначает гёделев номер предикатора M, а $\mathfrak{A}\llcorner n \lrcorner$ — замкнутый предикатор с гёделевым номером n, если таковой существует, и $\mathrm{q} \times (0=1)$ — иначе.

Определим алгорифм R-регуляризации.

$$\begin{aligned}
&R\llcorner(t=u)\lrcorner \rightleftharpoons (t=u),\\
&R\llcorner(A\,\&\,B)\lrcorner \rightleftharpoons (R\llcorner A\lrcorner\,\&\,R\llcorner B\lrcorner),\\
&R\llcorner(A\supset B)\lrcorner \rightleftharpoons (R\llcorner A\lrcorner\supset R\llcorner B\lrcorner),\\
&R\llcorner(A\vee B)\lrcorner \rightleftharpoons \neg(\neg R\llcorner A\lrcorner\,\&\,\neg R\llcorner B\lrcorner),\\
&R\llcorner\forall XA\lrcorner \rightleftharpoons \forall XR\llcorner A\lrcorner,\\
&R\llcorner\exists XA\lrcorner \rightleftharpoons \neg\forall X\neg R\llcorner A\lrcorner,\\
&R\llcorner q XA\lrcorner \rightleftharpoons q\, XR\llcorner A\lrcorner,\\
&R\llcorner(t\in qXA)\lrcorner \rightleftharpoons (t\in R\llcorner qXA\lrcorner),\\
&R\llcorner(t\in u)\lrcorner \rightleftharpoons (t\in\ulcorner R\llcorner\mathfrak{A}\llcorner u\lrcorner\lrcorner\urcorner).
\end{aligned}$$

Если A нормальна, то $\vDash A\Leftrightarrow\vDash R\llcorner A\lrcorner$, $\dashv A\Leftrightarrow\dashv R\llcorner A\lrcorner$.

Формула называется вполне нормальной, если она составлена из формул вида $(t\in R\llcorner u\lrcorner)$ и $(t=u)$ при помощи связок $\&$, $\supset$, $\forall$, q .

Формула называется вполне регулярной, если она имеет вид $\exists XA$, где A — вполне нормальная формула.

Определим алгорифм конструктивной расшифровки $Ш\llcorner A\lrcorner$ (аналогичный приведенному в ([5])) при помощи теоремы Клини о неподвижной точке. Пусть алгорифм $\mathfrak{C}(n, \ulcorner q X\exists YA\urcorner)$ перерабатывает гёделев номер $q X\exists YA$ в гёделев номер $q XA(Y|n)$.

Определение 4. Пусть A, B — вполне нормальные формулы, D, E — формулы, не являющиеся ни вполне нормальными, ни вполне регулярными.

1) $Ш\llcorner C\lrcorner\rightleftharpoons C$, C — вполне нормальная или вполне регулярная.
2) $Ш\llcorner\exists XA\supset\exists YB\lrcorner\rightleftharpoons\exists Y'\forall X'(A(X|X')\supset!\langle Y'\rangle(X')\,\&\,B(Y|\langle Y'\rangle(X')))$.
3) $Ш\llcorner A\supset\exists YB\lrcorner\rightleftharpoons\exists Y'(A\supset!\langle Y'\rangle(0)\,\&\,B(Y|\langle Y'\rangle(0)))$.
4) $Ш\llcorner\exists XA\&\exists YB\lrcorner\rightleftharpoons\exists X'(A(X|X')_1)\&B|(X')_2)$.
5) $Ш\llcorner A\&\exists YB\lrcorner\rightleftharpoons\exists Y'(A\&B(Y|Y'))$.
6) $Ш\llcorner\exists XA\,\&\,B\lrcorner\rightleftharpoons\exists X'(A(X|(X'),\&B)$.
7) $Ш\llcorner\exists XA\supset B_1\rightleftharpoons\forall X'(A(X|X')\supset B)$.
8) $Ш\llcorner\exists XA\vee\exists YB\lrcorner\rightleftharpoons\exists X'((X')_1=0\supset A(X|(X')_2)\,\&\,(X')_1\neq 0\supset$ $\supset B(Y|(X')_2))$.
9) $Ш\llcorner\exists XA\vee B\lrcorner\rightleftharpoons\exists X'((X')_1=0\supset A(X|(X')_2)\&(X')_1\neq0\supset B)$.
10) $Ш\llcorner A\vee\exists YB\lrcorner\rightleftharpoons\exists Y'((Y')_1=0\supset A\,\&\,(Y')_2\neq0\supset B(Y|(Y')_2))$.
11) $Ш\llcorner\forall X\exists YA\lrcorner\rightleftharpoons\exists X'\forall Y'(!\langle X'\rangle(Y')\,\&\,A(Y|\langle X'\rangle(Y')))$.
12) $Ш\llcorner\exists X\exists YA\lrcorner\rightleftharpoons\exists X'A(X|(X')_1, Y|(X')_2)$.
13) $Ш\llcorner A\vee B\lrcorner\rightleftharpoons\exists X'(X'=0\supset A\,\&\,X'\neq0\supset B)$.
14) $Ш\llcorner t\in q X\exists YB\lrcorner\rightleftharpoons\exists Y'(t\in q XA(Y|Y'))$.
15) $Ш\llcorner t\in u\lrcorner\rightleftharpoons\exists X'(t\in R(\mathfrak{C}(X',\ulcorner Ш\llcorner\mathfrak{A}\llcorner u\lrcorner\lrcorner\urcorner)))$.
16) $Ш\llcorner D\vee E\lrcorner\rightleftharpoons Ш\llcorner Ш\llcorner D\lrcorner\vee Ш\llcorner E\lrcorner\lrcorner$.
17) $Ш\llcorner D\,\&\,E\lrcorner\rightleftharpoons Ш\llcorner Ш\llcorner D\lrcorner\,\&\,Ш\llcorner E\lrcorner\lrcorner$.
18) $Ш\llcorner D\supset E\lrcorner\rightleftharpoons Ш\llcorner Ш\llcorner D\lrcorner\supset Ш\llcorner E\lrcorner\lrcorner$.
19) $Ш\llcorner\forall XD\lrcorner\rightleftharpoons Ш\llcorner\forall XШ\llcorner D\lrcorner\lrcorner$.
20) $Ш\llcorner\exists XD\lrcorner\rightleftharpoons Ш\llcorner\exists XШ\llcorner D\lrcorner\lrcorner$.
21) $Ш\llcorner(t\in q XD)\lrcorner\rightleftharpoons Ш\llcorner(t\in Ш\llcorner q XD\lrcorner)\lrcorner$.
22) $Ш\llcorner q XD\lrcorner\rightleftharpoons q XШ\llcorner D\lrcorner$.

Переменные X', Y' выбираются отличным от всех встречающихся в исходной формуле переменных.

Алгорифм $Ш$ перерабатывает каждую формулу во вполне регулярную или вполне нормальную.

Теорема 1. $\vDash A\Leftrightarrow\vDash Ш\llcorner A\lrcorner$, $\dashv A\Leftrightarrow\dashv Ш\llcorner A\lrcorner$.

Формулы языка Ω располагаются в иерархию, аналогичную иерархии Клини — Мостовского — Кипниса формул конструктивной арифметики ([6]) и иерархии Σ_α^Δ, Π_α^Δ ([3], [4]).

Дадим определения классов Σ_α^Ω, Π_α^Ω, $\Sigma_\alpha^{\Omega+}$, $\Pi_\alpha^{\Omega+}$, аналогичные определению классов Σ_α^Δ, Π_α^Δ ([4]), с добавлением следующего пункта:

Если $A \in \Sigma_\alpha^\Omega$ (Π_α^Ω), то $\exists X A \in \Sigma_\alpha^{\Omega+}$ ($\Pi_\alpha^{\Omega+}$).

Невырожденность этой иерархии для всех конструктивных ординалов доказывается легко. Критерий принадлежности формулы классу Σ_α^Ω (Π_α^Ω) дает следующая

Теорема 2. *$M \in \Sigma_\alpha^\Omega$ (Π_α^Ω) тогда и только тогда, когда:*

а) *найдется такая частично рекурсивная φ, что для всех n таких, что*

$$\models((n \in M) \supset (n \in M)),$$

$$!\varphi(n) \mathbin{\dot{\&}} \varphi(n)[R](\neg\neg(n \in M) \supset (n \in M));$$

б) *найдется такой предикатор N языка Δ, что $N \in \Sigma_\alpha^\Delta$ (Π_α^Δ) и*

$$\models(n \in M) \Leftrightarrow \models(n \in M),$$

$$\dashv(n \in N) \Leftrightarrow \dashv(n \in M).$$

Теорема 3. *Не существует такой формулы позитивного исчисления предикатов $\mathfrak{A}$ и такого n, что после замены в этой формуле предикатных символов $P(X_1, \ldots, X_k)$ формулами языка Ω вида $([X_1, \ldots, X_k] \in M)$, где*

$$\models \forall X (X \in M \supset X \in M),$$

n реализует получившуюся формулу.

Следовательно, в исчислении предикатов не найдется такой формулы, каждый пример которой был бы реализуем и реализуем одним и тем же натуральным числом n. Заметим, что всякая формула исчисления предикатов, выводимая в интуиционистской логике, будет обладать тем свойством, что при замене предикатных символов всегда осмысленными формулами языка Ω у нас получается реализуемая формула языка Ω.

Понятие законности формулы и понятие реализуемости, введенное в статье ([4]), распространяются на язык Ω подобным же образом. Определение алгорифма *Ш* остается в точности тем же самым. Сохраняются теоремы 1 и 2. Для обоих понятий реализуемости имеет место следующая теорема о нормальной форме.

Теорема 4. *По любому предикатору M языка Ω можно примитивно-рекурсивно построить предикатор $N \in \Pi_0^{\Omega+}$ и примитивно-рекурсивную функцию φ такую, что*

$$\dot{\forall} m \dot{\forall} n (m[R](n \in M) \Leftrightarrow \varphi(m)[R](n \in N)).$$

Эта теорема следует из теоремы статьи ([2]) о сводимости формул языка Δ по истинности к формулам класса Π_0^Δ.

Удмуртский государственный университет
Ижевск

Поступило
31 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Н. Н. Непейвода*, Математические заметки, т. 13, № 5 (1973). [2] *Н. Н. Непейвода*, ДАН, т. 212, № 1 (1973). [3] *Н. Н. Непейвода*, ДАН, т. 212, № 2 (1973). [4] *Н. Н. Непейвода*, ДАН, т. 219, № 6 (1974). [5] *Н. А. Шанин*, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 52, 226 (1958). [6] *М. М. Кипнис*, Исследования по конструктивной математике и математической логике, т. 11, Л., 1968.