ПИСЬМА в РЕДАКЦИЮ

УДК 533.9

О неустойчивости электронных ленгмюровских колебаний плазмы при наличии магнитного поля

В. Н. Ораевский

В работе [1] показано, что электронные продольные колебания в плазме без магнитного поля неустойчивы лишь по отношению к «распаду» на ионную продольную и электронную ленгмюровскую (с меньшей частотой) волны. Однако такая неустойчивость ленгмюровской волны приводит фактически только к сдвигу ее частоты. Между возбуждаемыми колебаниями энергия распределяется так, что в ионные колебания «перекачивается» энергия, приблизительно в $\sqrt{M/m}$ раз меньшая, чем в электронные (M, m — масса иона и электрона). Ниже будет показано, что в плазме, находящейся в магнитном поле (при определенных соотношениях между параметрами плазмы), возникает добавочная неустойчивость установившихся электронных ленгмюровских волн — распад на электромагнитные волны. (Здесь заметная доля энергии ленгмюровских колебаний перекачивается в энергию другого вида колебаний.) Как и в работе [1], исследуем устойчивость волн не слишком большой амплитуды (малый параметр $\alpha \equiv \dfrac{\delta n}{n_0}$, где δn — амплитуда электронной плотности ленгмюровской волны; n_0 — статическая плотность электронов). Тогда все величины, характеризующие электронную ленгмюровскую волну, можно представить в виде

$$A_e = A_{e0} + 2\delta A_e \cos \mathbf{k}_0\mathbf{r}' + O(\delta A_e^2), \tag{1}$$

где $\mathbf{k}_0$ — волновой вектор волны; $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{u}t$ (здесь $\mathbf{u}$ — фазовая скорость). Слагаемыми $O(\delta A_e^2)$ в первом порядке теории возмущений по α можно пренебречь. Иными словами, будем рассматривать устойчивость основной гармоники электронной ленгмюровской волны. Линеаризованные относительно малых отклонений от установившегося движения уравнения имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{e}{m}\mathbf{E} - [\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_H] + 2\alpha\cos(\mathbf{k}_0\mathbf{r}')(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{v} -$$

$$-2\alpha\sin(\mathbf{k}_0\mathbf{r}')\,\mathbf{u}\,(\mathbf{k}_0\mathbf{v}) + 2\alpha\frac{e}{mc}[\mathbf{u}\cos(\mathbf{k}_0\mathbf{r}')\,\mathbf{H}]; \tag{2}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = -4\pi e n; \tag{3}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \tag{4}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = -\frac{4\pi e n_0}{c}\left[\mathbf{v} + 2\alpha\left(\mathbf{v} - \frac{n}{n_0}\mathbf{u}\right)\cos(\mathbf{k}_0\mathbf{r}')\right] + $$

$$+\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\omega}_H = \frac{e\mathbf{H}_0}{mc}, \tag{6}$$

где $\mathbf{v}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, n — соответственно гидродинамическая скорость, электрическое и магнитное поля и электронная плотность, описывающие малые отклонения от установившегося движения.

В работе [1] показано, что неустойчивость может возникнуть лишь в случае возмущений, для которых пространственно-временна́я зависимость всех величин имеет вид

$$e^{i\omega' t}\left(a_1 e^{i\mathbf{k}_1\mathbf{r}'} + a_2 e^{i\mathbf{k}_2\mathbf{r}'}\right), \tag{7}$$

где $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ связаны соотношением

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_2. \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует, что

$$\omega_1 = \omega_0 + \omega_2. \tag{9}$$

Используя определенные свойства симметрии уравнений, описывающих динамику малых отклонений от установившегося движения (см. [2]), можно показать, что необходимым и достаточным условием существования неустойчивости волны к распаду на две (если не возникают поляризационные запреты) является такое соотношение знаков частот в (9), что

$$|\omega_0| = |\omega_1| + |\omega_2|. \tag{10}$$

Для рассматриваемого нами случая это означает, что неустойчивость может возникнуть при

$$\omega_0 \approx 2\omega_H. \tag{11}$$

Кроме того, из (9) и (10) видно, что возбуждаемые волны должны иметь различную поляризацию. Используя теорию возмущений для вырожденных состояний, из (2)—(6), учитывая (8)—(10), можно найти инкремент нарастания возмущений (поправку к ω', т. е. к частотам ω_1 и ω_2). Не приводя промежуточных выкладок (они аналогичны выкладкам, проделанным в работе [1]), запишем выражение для инкремента нарастания возмущений ν:

$$\nu^2 = -\frac{\alpha^2}{\omega_1\omega_2 a_1^2 a_2^2}\left\{\frac{\omega_0^2(\beta_1 k_{1z}+k_{1y})}{k_1^2}\left[(\beta_2 k_{1z}+k_{1y})+\frac{(\mathbf{k}_1\mathbf{u})(\beta_2 k_{2z}+k_{2y})}{\omega_2}\right]+\left[(1+\beta_1\beta_2)\,\omega_1+\frac{\omega_H^2}{\omega_2}\right](\mathbf{k}_2\mathbf{u})+\right.$$
$$\left.+\mathbf{k}_0\mathbf{u}\omega_1\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_2 O\left(\frac{\omega_0^2}{k^2c^2}\right)\right\}\left\{\frac{\omega_0^2(\beta_2 k_{2z}+k_{2y})}{k_2^2}\left[(\beta_1 k_{2z}+k_{2y})+\frac{(\mathbf{k}_2\mathbf{u})(\beta_1 k_{1z}+k_{1y})}{\omega_1}\right]+\left[(1+\beta_1\beta_2)\,\omega_2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\omega_H^2}{\omega_1}\right](\mathbf{k}_1\mathbf{u})+k_0 u\omega_2\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_2 O\left(\frac{\omega_0^2}{k^2c^2}\right)\right\}, \qquad (12)$$

где

$$a_{1,2}^2=\beta_{1,2}^2+\frac{\omega_0^2}{\omega_{1,2}^2 k_{1,2}^2}(\beta_{1,2}k_{1,2z}+k_{1,2y})^2+1+\frac{\omega_H^2}{\omega_{1,2}^2};$$

$$\beta_{1,2}=\frac{\omega_0^2 k_{1,2y}k_{1,2z}}{\omega_{1,2}^2 k_{1,2}^2-\omega_0^2 k_{1,2z}^2}.$$

Из (12) следует, что максимальный инкремент нарастания электромагнитных волн имеет порядок

$$\nu \approx \frac{\alpha}{10}\,\omega_H. \qquad (13)$$

Отметим, что описанный выше распад электронной продольной волны на две электромагнитные, по-видимому, экспериментально наблюдался в работе [3]. Роль ленгмюровских колебаний играл первоначально модулированный электронный пучок. Неустойчивость по отношению к возбуждению поперечных волн возникала при условии

$$p\omega_м \approx 2\omega_H, \qquad (14)$$

где $\omega_м$ — «частота» модулированного пучка; $p=1, 2, 3\ldots$ При $p = 1$ условие (14) совпадает с условием распада основной гармоники [см. (11)]; при $p = 2,3$ уравнение (14) является условием распада кратных гармоник.

В заключение автор приносит благодарность Р. З. Сагдееву, А. А. Галееву, а также Я. Б. Файнбергу и его сотрудникам за полезные дискуссии.

Поступило в Редакцию 28/VI 1963 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Ораевский, Р. З. Сагдеев. «Ж. техн. физ.», XXXII (1962).
2. А. А. Галеев, В. И. Карпман. «Ж. эксперим. и теор. физ»., 44, 592 (1963).
3. И. Ф. Харченко и др. «Ж. техн. физ.», XXXI 761 (1961). Я. Б. Файнберг. «Атомная энергия», 11, 313 (1961).

УДК 621.384.611

К расчету фазовых соотношений в циклотроне

Г. Н. Вялов

Фазовое движение в циклотроне изучалось, например, в работах [1, 2]. Как известно, уравнение фазового сдвига можно представить в виде

$$\sin\varphi_2 \sin\varphi_1 = \varkappa\left[\int_{\xi_1}^{\xi_2} h(\xi)\,d\xi + \frac{\xi_2^2-\xi_1^2}{2} - p(\xi_2-\xi_1)\right]; \qquad (1)$$

$$\varkappa = \frac{\pi W_к^2}{2eV_0 m_0 c^2}\,\frac{A}{Z}; \qquad (2)$$

где φ и $2V_0$ — фаза и амплитуда ускоряющего потенциала между дуантами соответственно; $W_к$ — конечная энергия иона на один нуклон; e — элементарный заряд; c — скорость света; m_0 — масса покоя нуклона; A и Z — массовое и зарядовое числа иона соответственно. Спад магнитного поля $h(\xi)$ и превышение магнитного поля H_0 в центре над резонансным значением H_{p0} определяются соотношениями

$$H(\xi) = H_0[1-\varepsilon_к h(\xi)]; \qquad (3)$$
$$H_{p0} = H_0(1-\varepsilon_к p), \qquad (4)$$

где $\varepsilon_к = \dfrac{W_к}{m_0c^2}$.

Полагая в (1) $\xi_1=\xi_s$, $\xi_2=\xi_0=0$ и решая (1) относительно $2eV_0$, получим

$$2eV_0 = \frac{\pi W_к^2}{m_0c^2}\,\frac{A}{Z}\,D(\xi_s, \varphi), \qquad (5)$$

где

$$D(\xi_s, \varphi) = \frac{\int_{\xi_s}^{0} h(\xi)\,d\xi - \frac{\xi_s^2}{2} + p\xi_s}{\sin\varphi_0 - \sin\varphi_s}, \qquad (6)$$

причем $p=h_s+\xi_s$; ξ_s — энергия иона в точке поворота фазы. Для определения ξ_s можно воспользоваться уравнением

$$B_1 = \frac{\sin\varphi_к - \sin\varphi_0}{\sin\varphi_0 - \sin\varphi_s} = \frac{\int_0^1 h(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2} - p}{\int_{\xi_s}^{0} h(\xi)\,d\xi - \frac{\xi_s^2}{2} + p\xi_s}. \qquad (7)$$