

Х. И. РАСКИН

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ФИЗИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ  
К ЗАДАЧАМ ВИБРАЦИОННОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА СЫПУЧЕЕ  
СРЕДЫ**

*(Представлено академиком В. В. Новожиловым 17 VI 1974)*

Теория поведения сыпучей среды под действием вибраций, имеющая широкое поле приложений, привлекла в последние годы внимание многих исследователей (см., например, работы <sup>(1, 2)</sup>, где развит детерминистический подход к проблеме, и работы <sup>(3-6)</sup>, где используются статистические методы), но до сих пор еще далека от своего завершения. В настоящей работе предлагается модель сыпучей среды, находящейся под действием вибраций; сыпучая среда в модели представляет собой совокупность однородных абсолютно твердых и абсолютно гладких сферических частиц одинакового диаметра, причем соударения частиц не являются вполне упругими. Такую модель мы условно назовем «простейшей сыпучей средой».

Предполагаем, что среда находится в сосуде произвольной формы и сосуд вибрирует по заданному закону. Рассмотрим физическую природу системы. В ней много общего с движением газов, изучаемым на молекулярном уровне: она также моделируется твердыми шарами и в процессе столкновений происходит обмен кинетической энергией между частицами. Существенное отличие заключается в том, что если в кинетической теории газов соударения частиц считаются упругими, то в рассматриваемой модели газов соударения не будут вполне упругими (часть кинетической энергии при ударе переходит в тепловую). Для описания состояния статистической системы используются осредненные характеристики движения частиц (макроразмеры). Состояние системы газовых молекул (газовая среда) в заданной точке описывается следующими макроразмерами: средней плотностью, средней скоростью молекул, температурой газа. Температурой газа называется величина, пропорциональная дисперсии скорости молекул. В рассматриваемой модели сыпучей среды введем понятие квазитемпературы, пропорциональной дисперсии скорости (средней энергии хаотического движения) частиц.

Поскольку в рассматриваемой модели при соударениях частиц теряется часть их кинетической энергии, то с макроскопической точки зрения существует непрерывный отвод квазитепла со всего объема. С другой стороны, имеют место потоки квазитепла от вибрирующих стенок сосуда, которые «разогревают» среду и препятствуют падению квазитемпературы.

Нами рассмотрен наиболее простой случай сильно возбужденной среды, когда величина свободного пробега много больше диаметра частицы. Изучение такого асимптотического случая представляет интерес не только для выяснения особенностей модели, но также и применительно к ряду прикладных задач (например, к теории некоторых типов вибротельных). Отметим, однако, что аппарат физической кинетики <sup>(7)</sup> может быть применен и для исследования плотной среды.

Пусть  $f(r, v, t)$  — плотность распределения частицы в фазовом пространстве  $r = \{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $v = \{dx_1/dt, dx_2/dt, dx_3/dt\}$ ,  $t$  — время.

Кинетическое уравнение системы (уравнение Больцмана) имеет вид (7, 8)

$$Df = \frac{\partial_e f}{\partial t}, \quad Df = \frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + F_i \frac{\partial f}{\partial v_i}, \quad (1)$$

где по индексам, встречающимся дважды, предполагается суммирование от 1 до 3, а  $\partial_e f / \partial t$  есть скорость изменения плотности распределения частиц, обусловленная столкновениями;  $F$  — сила, действующая на частицу между ударами.

Для любой величины  $\Phi(r, v, t)$ , характеризующей частицу, имеет место равенство (7)

$$\int \Phi(r, v_1, t) Df(v_1) dv_1 = \frac{1}{2} \int \Delta \Phi f(v_1) f(v_2) dv_1 dv_2, \quad (2)$$

где  $\Delta \Phi = \Phi(r, v_1, t) + \Phi(r, v_2, t) - \Phi(r, v_1', t) - \Phi(r, v_2', t)$ ,  $v_1$  и  $v_2$ ,  $v_1'$  и  $v_2'$  — скорости первой и второй частиц соответственно до и после удара.

Тогда из уравнения (2) для любой величины  $\Phi$ , сохраняющейся при соударениях (т. е. при  $\Delta \Phi = 0$ ), имеет место теорема сохранения (8):

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \Phi \rangle + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle v_i \Phi \rangle - \left\langle v_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right\rangle - \left\langle \frac{F_i}{m} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right\rangle - \frac{1}{m} \left\langle \frac{\partial F_i}{\partial v_i} \Phi \right\rangle = 0, \quad (3)$$

где  $\langle \cdot \rangle$  — математическое ожидание случайной величины,  $m$  — масса частицы.

Для исследуемой системы частиц сохраняющимися величинами являются масса и количество движения. Полагая  $\Phi = m$  или  $\Phi = mv_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , получаем из (3):

уравнение сохранения массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho u) = 0, \quad (4)$$

уравнение сохранения количества движения

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \nabla \right) u = \frac{\rho}{m} F + \nabla \vec{P}, \quad (5)$$

где

$$\rho(r, t) = \frac{mN}{V} \int f(r, v, t) dv,$$

$\rho(r, t)$  — плотность среды в заданной точке,  $V$  — объем системы,  $N$  — число частиц в системе;  $u(r, t) = \langle v(r, t) \rangle$ ,  $\vec{P}$  — тензор давления с компонентами  $p_{ij} = \rho \langle (v_i - u_i)(v_j - u_j) \rangle$ .

Уравнения (4) и (5) получаются такими же, как и для системы частиц с полностью упругими соударениями. Но для системы с упругими соударениями сохраняющейся величиной также была кинетическая энергия  $\Phi = \frac{1}{2} mv^2$ . Для системы с не вполне упругими соударениями из (2) вместо (3) для  $\Phi = \frac{1}{2} mv^2$  получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{1}{2} mv^2 \right\rangle + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle v_i \frac{mv^2}{2} \right\rangle - \left\langle v_i \frac{\partial (mv^2/2)}{\partial x_i} \right\rangle - \\ & - \frac{1}{m} \left\langle F_i \frac{\partial (mv^2/2)}{\partial v_i} \right\rangle - \frac{1}{m} \left\langle \frac{\partial F_i}{\partial v_i} \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \frac{1}{2} \int \Delta E f(v_1) f(v_2) dv_1 dv_2, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\Delta E$  — величина энергии, рассеиваемой при ударе.

Из (6) после преобразований имеем

$${}^{3}/_2\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + u\nabla\theta \right) + \nabla q + P\Lambda = -\xi, \quad (7)$$

где  $\theta(r, t) = {}^{1}/_3 m \langle (v-u)^2 \rangle$  — квазитемпература,  $q(r, t) = {}^{1}/_2 m \rho \langle (v-u)^3 \rangle$  — вектор потока квазитепла,  $\Lambda$  — тензор скорости деформации с компонентами  $\Lambda_{ij} = {}^{1}/_2 m (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$ ,

$$\xi(r, t) = \frac{1}{2} \int \Delta E f(v_1) f(v_2) dv_1 dv_2. \quad (8)$$

Если нет рассеивания энергии при ударе, от  $\xi=0$  и уравнения (4), (5) и (7) превращаются в известные уравнения для системы частиц с упругими соударениями.

Важнейшее значение имеет запись граничных условий для уравнений (4), (5) и (7) через параметры, характеризующие закон колебаний сосуда. Для их получения рассмотрим взаимодействие стенок сосуда со средой. Пусть ось  $x_3$  нормальна к данному элементу поверхности. Количество частиц, ударяющихся о стенку в единицу времени и приходящихся на единицу поверхности, равно

$$N \int [v_3 - \xi_3] f(r, v, t) dv, \quad (9)$$

$\xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$  — скорость движения стенки, являющаяся периодической функцией  $t$  с периодом  $T$ ;

$$[v_3 - \xi_3] = \begin{cases} 0, & \text{если } v_3 - \xi_3 < 0, \\ v_3 - \xi_3, & \text{если } v_3 - \xi_3 > 0. \end{cases}$$

Если  $\varphi(v - \xi)$  — импульс, переданный частицей при ударе о вибрирующую поверхность, то поток импульса, приходящийся на единицу поверхности,

$$J = N \int \varphi [v_3 - \xi_3] f dv.$$

Количество энергии, передаваемой среде стенками сосуда (поток квазитепла), осредненное по периоду,

$$q_3 = \frac{1}{T} \int_0^T J \xi dt. \quad (10)$$

Касательные напряжения

$$p_{13} = \frac{1}{T} \int_0^T J_1 dt, \quad p_{23} = \frac{1}{T} \int_0^T J_2 dt. \quad (11)$$

Нормальное напряжение

$$p_{33} = \frac{1}{T} \int_0^T J_3 dt. \quad (12)$$

Таким образом, (10), (11) и (12) дают граничные условия для уравнений (4), (5), (7). Однако для решения этих уравнений нужно знать функцию распределения. Применим метод последовательных приближений Чемпена — Энскога, позволяющий найти решения, зависящие от времени неявно через локальные плотность, скорость и температуру.

Введем формально параметр  $\varepsilon$ , который в конце вычислений полагаем равным единице. Запишем кинетическое уравнение в виде

$$\varepsilon Df = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Кроме того будем считать, что величина энергии, рассеиваемой при соударении двух частиц, имеет порядок  $\varepsilon$ , т. е.

$${}^{1}/_2 m (v_1^2 + v_2^2 - v_1'^2 - v_2'^2) = \varepsilon \Delta E.$$

Полагая  $\varepsilon=0$ , получаем в качестве нулевого приближения для функции распределения локальное распределение Максвелла — Больцмана

$$f^{(0)} = (2\pi)^{-1,5} \rho m^{0,5} \theta^{-1,5} \exp \left[ \frac{-m(v-u)^2}{2\theta} \right],$$

где  $\rho$ ,  $\theta$  и  $u$  — медленно меняющиеся функции  $r$  и  $t$ . Ищем решение  $f(r, v, t)$  в виде

$$f(r, v, t) = f^{(0)}(r, v, t) + \varepsilon f^{(1)}(r, v, t) + \dots$$

Тогда, проведя обычные для метода Чемпена — Энскога вычисления (7), получим уравнения первого приближения в следующем виде:

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho u) = 0, \quad (13)$$

уравнение Навье — Стокса

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u \nabla \right) u = \frac{1}{m} F + \frac{1}{\rho} \left( P - \frac{\mu}{3} \nabla u \right) + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 u, \quad (14)$$

уравнение теплопроводности

$$\frac{3}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \nabla \right) \theta + (\nabla u) \theta - K \frac{1}{\rho} \nabla^2 \theta + \frac{1}{\rho} \xi = 0, \quad (15)$$

где  $\mu$  — коэффициент вязкости,  $K$  — коэффициент теплопроводности, причем  $\mu = \gamma_1 \theta^{0,5}$ ,  $K = 2,5 \mu$ ,  $\gamma_1$  — коэффициент, зависящий от массы и диаметра частиц.

Система уравнений (13), (14), (15) отличается от уравнений газовой динамики первого порядка тем, что в правой части уравнения теплопроводности (14) имеется член  $\xi$ , учитывающий отвод квазитепла. Введем некоторые предположения относительно энергии, рассеиваемой при столкновениях. Будем считать, что

$$\Delta E = \gamma(\Omega) |v_2 - v_1|^2, \quad (16)$$

где  $\gamma(\Omega)$  — коэффициент, зависящий от углов рассеяния.

Тогда, подставив (16) в (8) и приняв  $f = f^{(0)}$ , после интегрирования получим

$$\xi = \gamma_2 \rho^2 \theta^{1,5},$$

где  $\gamma_2$  — коэффициент, зависящий от массы частиц, их диаметра и от закона рассеяния энергии (16).

Применимость предлагаемой модели к изучению реальных задач о поведении сыпучих тел при вибрациях требует экспериментальной проверки. Однако характер полученных соотношений позволяет надеяться, по крайней мере, на удовлетворительное качественное описание ряда важных процессов.

Автор благодарен И. И. Блехману и акад. В. В. Новожилову за активный интерес к работе и замечания.

Рижский политехнический институт

Поступило  
12 VI 1974

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> И. И. Блехман, В. В. Гортинский, Г. Е. Птушкина, Изв. АН СССР, *Механика и машиностроение*, № 4 (1963). <sup>2</sup> И. И. Блехман, В. Я. Хайнман, Изв. АН СССР, *Механика*, № 5 (1965). <sup>3</sup> И. И. Блехман, В. Я. Хайнман, Изв. АН СССР, *Механика твердого тела*, № 6 (1968). <sup>4</sup> Е. А. Непомнящий, Изв. Ленингр. электротехнич. инст., № 46 (1961). <sup>5</sup> Е. А. Непомнящий, Обогащение руд, № 6 (1964). <sup>6</sup> Е. А. Непомнящий, Обогащение руд, № 2 (1966). <sup>7</sup> С. Чемпен, Т. Каулинг, Математическая теория неоднородных газов, ИЛ, 1960. <sup>8</sup> Керзон Хуанг, Статистическая механика, М., 1966.