Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 6

УДК 517.11 *МАТЕМАТИКА*

С. Н. МАНУКЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОНСТРУКТИВНЫХ ПРОСТЫХ ДУГ ОТНОСИТЕЛЬНО АЛГОРИФМИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 5 VIII 1974)

Все понятия конструктивного анализа понимаются в дальнейшем так же, как в [1-4].

Основной целью наших рассмотрений является установление следующей теоремы.

Теорема. *Если $\mathfrak{A}$ есть алгорифм, перерабатывающий запись всякой равномерно непрерывной простой дуги, заданной на* $0\Delta 1$, *в некоторую FR-точку, то осуществима квазиравномерно непрерывная простая дуга S, заданная на* $0\Delta 1$ *и такая, что FR-точка $\mathfrak{A}(S)$ не может не лежать на S.*

Тем самым решается отрицательно поставленная А. А. Марковым проблема существования алгорифма, по всякой простой дуге выдающего конструктивную точку вне этой дуги; такой алгорифм не может существовать даже для равномерно непрерывных простых дуг.

Введем некоторые дополнительные понятия и сформулируем несколько лемм.

Будем рассматривать алфавит *Щ*, включающий все необходимые символы для изображения рассматриваемых объектов конструктивного анализа. Вместо «нормальный алгорифм в стандартном расширении Щ» будем говорить просто «алгорифм».

Обозначим через T алгорифм, перерабатывающий каждое FR-число t в FR-точку $t\sigma 0$. Мы будем в дальнейшем рассматривать T как простую дугу, заданную на $0\Delta 1$.

Введем взаимно однозначную нумерацию всех рациональных точек плоскости. Обозначим через B алгорифм, перерабатывающий всякое натуральное число n в соответствующую рациональную точку.

Через β обозначим алгорифм, который по всякой FR-точке $x\sigma y$ выдает минимум ее расстояний до точек отрезка $T(0)\Delta T(1)$.

Через $\{m\}$ будем обозначать ч.р.ф$_1$ с гёделевым номером m. ч.р.ф$_1$ назовем предельной, если *:

1) φ есть о.р.ф.;
2) точка $B(\varphi(0))$ не лежит на отрезке $T(0)\Delta T(1)$;
3) для всякого натурального k

$$\rho(B(\varphi(k)),\quad B(\varphi(k+1)))<2^{-2k-2}\min(1,\ \beta(B(\varphi(0)))). \qquad (*)$$

Через $!!_k\{n\}(l)$ будем обозначать суждение $T_1(n,l,k)$, где предикат T_1 определяется таким же образом, как в § 57 из [5] (напомним, что $\forall n\forall k_1\forall k_2\ (T_1(n,l,k_1)\&T_1(n,l,k_2)\supset k_1=k_2)$).

Через $!_k\{n\}\ (l)$ будем обозначать суждение $\exists r_{r<k}T_1(n,l,r)$.

Пусть Γ есть алгорифм, перерабатывающий всякое натуральное число в невырожденный рациональный сегмент, содержащийся в $0\Delta 1$; тогда через $\bigcup\limits_{i=0}^{n}\Gamma_i$ будем обозначать конструктивное множество FR-чисел такое, что

* Ч.р.ф.$_1$ – одноместная частично-рекурсивная функция, о.р.ф. – общерекурсивная функция.

$x \in \bigcup_{i=0}^{n} \Gamma_i$ в том и только том случае, когда

$$\exists ij\,(i \leqslant n \,\&\, j \leqslant n \,\&\, (i=j \vee Эп(\Gamma_i)=Эл(\Gamma_j) \vee Эл(\Gamma_i)=$$

$$=Эп(\Gamma_j) \,\&\, x \in \min\,(Эл(\Gamma_j), Эл(\Gamma_i))\,\Delta\,\max\,(Эп(\Gamma_j), Эп(\Gamma_i)))).$$

Лемма 1. *Пусть Γ есть алгорифм, перерабатывающий всякое натуральное число в невырожденный рациональный сегмент, содержащийся в $0\,\Delta\,1$; L есть алгорифм, перерабатывающий всякое натуральное число k в запись ломаной с рациональными вершинами, определенной на сегменте Γ_k. Пусть, далее, имеют место следующие условия:*

1) *Если $k \neq l$, то Γ_k и Γ_l не имеют общих внутренних точек.*

2) *Если $Эп(\Gamma_k)=Эл(\Gamma_l)$, то $\langle L_l \rangle (Эл(\Gamma_l))=\langle L_k \rangle (Эп(\Gamma_k))$.*

3) *Для любых $t_1, t_2 \in 0\,\Delta\,1$, если $t_1 \neq t_2$, то $\exists k \exists l((Эп(\Gamma_l)=Эл(\Gamma_k) \vee \vee Эп(\Gamma_k)=Эл(\Gamma_l))\,\&\,(t_1 \in \Gamma_k \cup \Gamma_l \vee t_2 \in \Gamma_k \cup \Gamma_l))$ (отсюда следует, что имеется не более одной точки сегмента $0\,\Delta\,1$, не принадлежащей сегментам Γ_i).*

4) $\forall k \forall t (t \in 0\,\Delta\,1 \supset \exists n ((D^-(t*n)\,\nabla\,D^+(t*n)) \subseteq \bigcup^{n} \Gamma_i) \vee \exists a \exists b (\forall t' (t' \in$

$\in 0\,\Delta\,1 \supset t' \in \bigcup^{n} \Gamma_i \vee t' \in a\Delta b)\,\&\, t \in a \nabla b \,\&\, \forall t' t'' pq (t', t'' \in a\Delta b \,\&\, t' \in \Gamma_p \,\&\, t'' \in$

$\in \Gamma_q \supset \rho(\langle L_p \rangle (t'), \langle L_q \rangle (t'')) < 2^{-k})))).$

Тогда осуществима кривая W, заданная на $0\,\Delta\,1$ и такая, что если $t \in \Gamma_k$, то $W(t)=\langle L_k \rangle (t)$.

Метод доказательства. Для вычисления $W(t)$ с заданной точностью строим сегменты Γ_i и числа $D^+(t*i)$ и $D^-(t*i)$ при $i=0, 1, \ldots$; при достаточно больших i на основании условия (4) окажется: или интервал $D^-(t*i)\,\nabla\,D^+(t*i)$ будет покрыт сегментами $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_i$ (в этом случае $W(t)$ вычисляется исходя из $L_0, L_1, \ldots, L_i$), или t будет находиться в интервале $a \nabla b$ с малым разбросом точек вида $L_p(t')$ при $t' \in a \nabla b$ (в этом случае в качестве приближения $W(t)$ может быть взята любая из этих точек).

Лемма 2. *Осуществим алгорифм C, перерабатывающий всякое натуральное число m в запись квазиравномерно непрерывной простой дуги, заданной на $0\,\Delta\,1$ и удовлетворяющей следующим условиям:*

1) *если $\neg !\{m\}(0)$, то дуга с записью $C(m)$ есть линейный образ отрезка $T(0)\,\Delta\,T(1)$;*

2) *если $\{m\}$ есть предельная* ч.р.ф., *то FR-точка, являющаяся пределом последовательности рациональных точек $B(\{m\}(k))$, лежит на простой дуге, записью которой является $C(m)$.*

Метод доказательства. Пусть задано натуральное число m. Зафиксируем сегментное дизъюнктное точное невырожденное бесконечное покрытие Φ сегмента $0\,\Delta\,1$. Дуга с записью $C(m)$ строится на основании леммы 1 исходя из алгорифмов Γ и L таких, что для всякого n Γ_n и L_n получаются при помощи следующих построений, позволяющих строить последовательно рациональные сегменты $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots,$ и ломаные $L_0, L_1, \ldots$:

1) Если $\neg !_i\{m\}(0)$ или $!_i\{m\}(0)$ и точка $B(\{m\}(0))$ лежит на $T(0)\,\Delta\,T(1)$, то Γ_i есть Φ_i, L_i есть образ Γ_i при линейном отображении $0\,\Delta\,1$ на $T(0)\,\Delta\,T(1)$.

2) Если построено натуральное число q такое, что $!!_q\{m\}(0)$, причем $B(\{m\}(0))$ не лежит на $T(0)\,\Delta\,T(1)$, то $\Gamma_{q+1}, \Gamma_{q+2}, \ldots, \Gamma_{q+p}$ при соответствующем p выбираются таким образом, чтобы они «заполняли» все сегменты, дополняющие $\bigcup_{i=q}^{q} \Gamma_i$ до $0\,\Delta\,1$, кроме одного из этих сегментов — обозначим его через r; в качестве $L_{q+1}, L_{q+2}, \ldots, L_{q+p}$ берутся образы $\Gamma_{q+1}, \Gamma_{q+2}, \ldots, \Gamma_{q+p}$ при линейном отображении $0\,\Delta\,1$ на $T(0)\,\Delta\,T(1)$.

Далее строится квадрат Q_0 с центром в точке $B(\{m\}(0))$ со сторонами, параллельными осям координат, и со стороной $a_0=\min(1, R)$, где R есть рациональное число такое, что

$$^3/_4\beta(B(\{m\}(0)))<R<\beta(B(\{m\}(0))).$$

В качестве Γ_{q+p+1} и Γ_{q+p+2} берутся первая и последняя треть сегмента, дополняющего $\bigcup\limits_{i=0}^{q+p}\Gamma_i$ до $0\,\Delta\,1$; в качестве L_{q+p+1} и L_{q+p+2} берутся несамопересекающиеся и не пересекающие одна другую ломаные с рациональными вершинами, не заходящие внутрь Q_0 и соединяющие соответствующие концы s с концами верхней стороны квадрата Q_0, где s есть образ r при линейном отображении $0\,\Delta\,1$ на $T(0)\Delta T(1)$.

Дальнейшие построения ведутся аналогичным образом. Если $\urcorner!_j\{m\}(1)$, то в качестве $\Gamma_{q+p+3+j}$ берется образ сегмента Φ_j при линейном отображении сегмента $0\,\Delta\,1$ не сегмент, дополняющий $\bigcup\limits_{i=0}^{q+p+2}\Gamma_i$ до $0\,\Delta\,1$; в качестве $L_{q+p+3+j}$ берется образ Φ_j при линейном отображении $0\Delta 1$ на верхнюю сторону квадрата Q_0. Если будет построено число q_1 такое, что $!!_{q_1}\{m\}(1)$, то при построении сегментов вида $\Gamma_{q+p+3+q_1+j}$ и ломаных вида $L_{q+p+3+q_1+j}$ при $j=0, 1, \ldots$ совершается сначала «заполнение пустот» (кроме одной) на $0\,\Delta\,1$, затем «переход» на верхнюю сторону квадрата Q_1 с центром в точке $B(\{m\}(1))$, со сторонами, параллельными сторонам Q_0, и с длиной сторон, вчетверо меньшей, чем длина сторон Q_0 (при этом, однако, если окажется, что

$$\rho(B(\{m\}(0)), B(\{m\}(1)))\geqslant 2^{-2}\min(1, \beta(B(\{m\}(0)))),$$

то все построения производятся так же, как и в случае $\urcorner!(\{m\}(1))$.

Последовательно строя точки $B(\{m\}(0))$, $B(\{m\}(1)), \ldots$ (если они существуют и если не нарушается условие $(*)$) и квадраты $Q_0, Q_1, \ldots$ с центрами в этих точках (длина сторон у Q_{m+1} берется вчетверо меньше, чем у Q_m, откуда следует, что каждый квадрат Q_{m+1} вложен в Q_m), мы можем указанным способом построить Γ_n и L_n при любых n.

Лемма 3. *Осуществим алгорифм A, перерабатывающий всякое слово P в Щ в натуральное число m такое, что*:

1) *если P есть FR-точка, лежащая на $T(0)\,\Delta\,T(1)$, то $\forall k\urcorner!\{m\}(k)$;*

2) *если P есть FR-точка, не лежащая на $T(0)\,\Delta\,T(1)$, то $\{m\}$ есть предельная* ч.р.ф *и $B(\{m\}(k))\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}P$.*

Метод доказательства. Для вычисления $\{m\}(i)$ при заданном i вначале, рассматривая P как FR-точку, вычисляем $\mu k[\beta(P)>2^{-k}]$ (если $\beta(P)=0$, то $\urcorner!\{m\}(i)$); затем $\{m\}(i)$ выбирается таким образом, чтобы последовательность точек $B(\{m\}(i))$ была удалена от $T(0)\,\Delta\,T(1)$ и достаточно быстро сходилась бы к P.

Доказательство теоремы. Построим алгорифм V, который по всякому слову вида $a*Q$, где a есть номер записи некоторого алгорифма $\mathfrak{A}$ при естественной взаимно однозначной нумерации записей алгорифмов и Q есть слово в *Щ*, выдает слово $\mathfrak{A}(Q)$.

Построим алгорифмы C и A, удовлетворяющие соответственно условиям леммы 2 и 3.

Построим ч.р.ф ζ такую, что

$$\forall n\,\forall m(\zeta(n, m)\simeq A(V(n*C(m)))).$$

Согласно теореме о неподвижной точке, построим такую примитивно-рекурсивную функцию g, что $\forall n\,\forall k(\{\zeta(n, g(n))\}(k)\simeq\{g(n)\}(k))$.

Пусть a есть номер записи алгорифма $\mathfrak{A}$, удовлетворяющего условиям теоремы. Докажем, что простая дуга с записью $C(g(a))$ требуемая.

В силу определения ζ и g имеем

$$\zeta(a, g(a)) \simeq A(V(a*C(g(a)))); \quad (1)$$

$$\forall k(\{\zeta(a, g(a))\}(k) \simeq \{g(a)\}(k)). \quad (2)$$

Случай 1. Функция $\{g(a)\}$ является всюду неопределенной. Тогда, согласно лемме 2, $C(g(a))$ есть запись линейного образа отрезка $T(0)\Delta T(1)$. С другой стороны, из (1) и (2), согласно лемме 3, следует, что точка $V(a*C(g(a)))$ лежит на $T(0)\Delta T(1)$ (иначе, согласно (1), функции $\{\zeta(a, g(a))\}$ и $\{g(a)\}$ были бы предельными), т. е. точка $\mathfrak{A}(C(g(a)))$ лежит на дуге с записью $C(g(a))$, что и требовалось.

Случай 2. Функция $\{g(a)\}$ не является всюду неопределенной. Тогда, в силу (1) и (2), в соответствии с леммой 3 получаем, что функция $\{g(a)\}$ предельная. Тогда, согласно лемме 2, предел последовательности $B(\{g(a)\}(k))$ лежит на дуге с записью $C(g(a))$. С другой стороны, из (1) и (2), согласно лемме 3, имеем, что $B(\{g(a)\}(k)) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} V(a*C(g(a)))$, т. е. точка $\mathfrak{A}(C(g(a)))$ снова лежит на дуге с записью $C(g(a))$.

Теорема доказана.

Автор приносит глубокую благодарность чл.-корр. АН СССР А. А. Маркову за постановку задачи, а также Б. А. Кушнеру, И. Д. Заславскому, М. А. Хачатряну за ряд ценных советов и замечаний.

Вычислительный центр
Академии наук АрмССР и
Ереванского государственного университета
Ереван

Поступило
16 VII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *И. Д. Заславский*, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, т. 67, 385 (1962). [2] *И. Д. Заславский, Г. С. Цейтин*, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, т. 67, 458 (1962). [3] *И. Д. Заславский, С. Н. Манукян*, Тр. Вычислит. центра АН АрмССР и Ереванск. гос. унив., Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники, т. 5, 26 (1968). [4] *С. Н. Манукян*, Изв. АН АрмССР, сер. Математика, т. 8, № 4, 291 (1973). [5] *S. C. Kleene*, Introduction to Metamatematics, N. Y.– Toronto, 1952; *С. К. Клини*, Введение в метаматематику, 1957.