Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 6

УДК 517.947.44 МАТЕМАТИКА

Л. А. МУРАВЕЙ

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ ВРЕМЕНИ ФУНКЦИИ ГРИНА ПЕРВОЙ ВНЕШНЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 13 IX 1974)

Работа посвящена исследованию асимптотического поведения при больших значениях t решения $U(t, x; y)$ следующей задачи:

$$\partial^2U/\partial t^2=\Delta_x U, \quad t>0, \quad x\in\Omega, \tag{1}$$

$$\partial U/\partial t|_{t=0}=\delta(x-y), \quad U|_{t=0}=0, \quad x, y\in\Omega, \tag{2}$$

$$U|_{x\in\Gamma}=0, \quad t>0, \tag{3}$$

где Ω — неограниченная область плоскости E_2, граница которой — замкнутая дважды гладкая строго выпуклая кривая Γ (функция U является функцией Грина первой краевой задачи для волнового уравнения).

Обозначим через Ω_R, Ω_R^ρ, K_{T_0,R_0} и $K_{T_0,R_0}^{(\rho)}$ соответственно области $\Omega\cap\{|x|<R\}$, $\Omega\cap\{x\colon \operatorname{dist}(x, \Gamma)>\rho\}$, $\{(t, x)\colon T_0<t, x\in\Omega_{t-R_0}\}$ и $\{(t, x)\colon T_0<t, x\in\Omega_{t-R_0}^{(\rho)}\}$, где $R\geqslant R'$, а $R'>0$ таково, что $\Gamma\subset\{|x|<R'\}$, $0<\rho<\operatorname{dist}(\Gamma, \{|x|=R'\})$, $T_0\geqslant T'=2R'$, $0<R_0<T_0-R'$.

Пусть $\mu(x)$, $x\in\Gamma$,— решение интегрального уравнения

$$\mu(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_\Gamma \frac{(n_x, y-x)}{|y-x|^2}\mu(y)\,ds_y$$

(n_x — вектор внешней по отношению к Ω единичной нормали к контуру Γ в точке x), удовлетворяющее условию $\int\limits_\Gamma\mu(x)\,ds_x=1$.

Обозначим через $W(t, x; y)$, $t>0$, $x\in\overline{\Omega}$; $y\in\overline{\Omega}$, функцию $w(t, x)\cdot\nu(y)$, где

$$\nu(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_\Gamma \mu(y)\,(\ln|x-y|-\ln|y|)\,ds_y$$

(отметим, что функция $\nu(x)$ положительна и гармонична в Ω, непрерывна в $\overline{\Omega}$ и равна нулю на Γ (начало координат считаем расположенным в $E_2\diagdown\overline{\Omega}$)), а

$$w(t, x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma \mu(y)\left(\int\limits_L e^{-ikt}\frac{-{}^1/_4 iH_0^{(1)}(k|x-y|)}{(1/\pi)\ln k+\gamma+\delta}\,dk\right)ds_y,$$

здесь $-{}^1/_4 iH_0^{(1)}(k|x-y|)$ — фундаментальное решение уравнения Гельмгольца $\Delta v+k^2v=0$ ($H_0^{(1)}$ — первая функция Ганкеля нулевого порядка), L — контур в полуплоскости $\{0<\arg k<\pi\}$, заданный уравнением $\{\operatorname{Im} k=\varepsilon, -\infty<\operatorname{Re} k<\infty\}$, $\varepsilon>0$, $\gamma=-i/2+(1/\pi)(\mathrm{C}-\ln 2)$ (C — постоянная

Эйлера) и $\delta=\frac{1}{\pi}\int_{\Gamma}\mu(y)\ln|y|ds_y$. Непосредственно проверяется, что при любом $y\in\overline{\Omega}$ функция $W(t,x;y)$ является обобщенным (из $L_2^{\text{loc}}(\Omega\times(0<t))$) решением уравнения (1); при этом $W(t,x;y)\in C^\infty(K_{T',R'}\times\Omega)$ и $\partial^l W(t,x;y)/\partial t^l\in C(\overline{K}_{T',R'}\times\overline{\Omega})$, $l=0,1,\ldots$.

Теорема 1. *Для любого R, $R\geqslant R'$, существуют такие положительные числа T_0 и R_0 (T_0 и R_0 зависят также от Γ), что $U(t,x;y)\in C^\infty(K_{T_0,R_0}\times\Omega_R)$ и при любом $l=0,1,..$ $\partial^l U(t,x;y)/\partial t^l\in C(\overline{K}_{T_0,R_0}\times\Omega_R)$. При этом для всех $l=0,1,\ldots$, $(t,x)\in\overline{K}_{T_0,R_0}$ и $y\in\overline{\Omega}_R^{(\rho)}$ имеют место оценки*

$$\left|\frac{\partial^l U(t,x;y)}{\partial t^l}-\frac{\partial^l W(t,x;y)}{\partial t^l}\right|\leqslant\frac{C}{t^{1/2}(t-|x|)^{5/2+l}}\tag{4}$$

с некоторой (зависящей только от l, R, ρ и Γ) положительной постоянной C.

Нетрудно видеть, что функция W обладает, например, следующими свойствами:

1) для любых R, ρ, $R\geqslant R'$, $0<\rho<\operatorname{dist}(\Gamma,\{|x|=R'\})$, и $l=0,1,\ldots$ существуют такие положительные числа T_0 и R_0 (зависящие также от Γ), что при всех $(t,x)\in\overline{K}_{T_0,R_0}^{(\rho)}$ и $y\in\overline{\Omega}_R^{(\rho)}$ имеют место оценки

$$C_1\frac{\ln(2+|x|)}{t^{1/2}(t-|x|)^{1/2+l}\ln t\ln(t-|x|)}\leqslant(-1)^l\frac{\partial^l W(t,x;y)}{\partial t^l}\leqslant$$
$$\leqslant C_2\frac{\ln(2+|x|)}{t^{1/2}(t-|x|)^{1/2+l}\ln t\ln(t-|x|)}$$

с некоторыми (зависящими от l, R, ρ и Γ) положительными постоянными C_1 и C_2;

2) для любого R, $R\geqslant R'$, существует такое положительное число T (зависящее также от Γ), что при всех $t\geqslant T$, $x,y\in\overline{\Omega}_R$ и $l=0,1,\ldots$

$$\frac{\partial^l W(t,x;y)}{\partial t^l}=\frac{\varphi_l(t)}{t^{1+l}\ln^2 t}\nu(x)\nu(y)+\tilde{W}_l(t,x;y),$$

где функции

$$\varphi_l(t)=\frac{t^{1+l}\ln^2 t}{2\pi}\int_0^\infty\frac{(-\tau)^l e^{-\tau t}\,d\tau}{[(1/\pi)(\ln\tau+\mathrm{C}-\ln 2)+\delta]^2+1}$$

принадлежат $C^\infty([T\leqslant t))$ и имеют конечные отличные от нуля пределы при $t\to\infty$, а для функции $\tilde{W}_l(t,x;y)$ справедлива оценка

$$|\tilde{W}_l(t,x;y)|\leqslant C/t^{3+l}$$

с некоторой (зависящей от l, R и Γ) положительной постоянной C. Тогда, в силу теоремы 1, теми же свойствами обладает и функция Грина U.

Теорема 2. *Для любого R, $R\geqslant R'$, существует такое положительное число T (зависящее также от Γ), что при всех $t\geqslant T$, x, $y\in\overline{\Omega}_R$ и любых $l=0,1,\ldots$ и $N=1,2,\ldots$*

$$\frac{\partial^l U(t,x;y)}{\partial t^l}=\nu(x)\nu(y)\frac{\varphi_l(t)}{t^{1+l}\ln^2 t}+\sum_{n=1}^N\left[\sum_{m=0}^{n-1}U_{m,n}^l(x,y)\frac{\ln^m t}{t^{2n+1+l}}+\right.$$
$$\left.+\sum_{m=1}^{n+1}U_{-m,n}^l(x,y)\frac{\varphi_{m,n}^l(t)}{t^{2n+1+l}\ln^{m+1}t}\right]+\tilde{U}_N^l(t,x;y),\tag{5}$$

где функции $\varphi_{m,n}^{l}(t)$, $n=1, 2, \ldots, m=1, \ldots, n+1$, $l=0, 1, \ldots$ *имеют конечные отличные от нуля пределы при* $t\to\infty$, *а для функции* $\tilde U_N{}^l(t, x; y)$ *при* $t\geqslant T$, $x\in\bar\Omega_R$ *и* $y\in\bar\Omega_R{}^{(\rho)}$ *справедлива оценка*

$$|\tilde U_N{}^l(t,x;y)|\leqslant C\frac{\ln^N t}{t^{2N+3+l}}$$

с некоторой (*зависящей от* l, N, R, ρ *и* Γ) *положительной постоянной* C; *функции* $U_{m,n}^{l}(x,y)=U_{m,n}^{l}(y,x)$, $n=1, 2, \ldots, m=-n-1, \ldots, n+1$, $l=0, 1, \ldots$, *в* (5) *принадлежат* $C^\infty(\Omega\times\Omega)\cap C(\bar\Omega\times\bar\Omega)$, *а функции* $\varphi_{m,n}^{l}(t)$, $n=1, 2, \ldots, m=1, \ldots, n+1$, $l=0, 1, \ldots$, *принадлежат* $C^\infty([T\leqslant t))$.

Отметим, что если начальные функции $f_0(x)=\partial u(t, x)/\partial t|_{t=0}$ и $f_1(x)=u(t, x)|_{t=0}$ принадлежат $C^1(\bar\Omega)$ и $C^2(\bar\Omega)$ соответственно, имеют ограниченные носители и обращаются в нуль на Γ, то утверждения, аналогичные теоремам 1 и 2, имеют место и для решений $u(t, x)$ первой краевой задачи для волнового уравнения в $\Omega\times(0<t)$. Более того, если дополнительно $\Gamma\in C^{2+l}$ и $f_\alpha(x)\in C^{1+l+\alpha}(\bar\Omega)$, $\alpha=0, 1$, $l=0, 1, \ldots$, и на Γ функции f_α обращаются в нуль вместе со своими производными до порядка $1+l+\alpha$ включительно, то $\partial^l u(t, x)/\partial t^l\in C(\bar\Omega\times[T\leqslant t))$ и имеют место оценки

$$\left|\frac{\partial^l u(t,x)}{\partial t^l}\right|\leqslant C\frac{\ln(2+|x|)}{t^{1/2}(1+|t-|x||)^{1/2+l}\ln t\ln(2+|t-|x||)},\qquad x\in\bar\Omega,\qquad t\geqslant T,$$

где T и C — некоторые (зависящие от l, $\|f_\alpha\|_{C^{1+l+\alpha}(\Omega)}$, $\operatorname{supp} f_\alpha$, $\alpha=0, 1$, и Γ) положительные постоянные.

Теоремы 1, 2, а также соответствующие утверждения для решений первой краевой задачи для волнового уравнения доказываются методами работ ([1-4]). При этом, кроме свойств функции Грина $G(x, y, k)$ первой краевой задачи для уравнения Гельмгольца в Ω, установленных в ([5]), используется также следующая

Теорема 3. *Существует такое положительное число* $b=b(\Gamma)$, *что функция* $G(x, y, k)$ *допускает аналитическое продолжение в область* $K=\{-\pi/2<\arg k<3\pi/2\}\cap\{|k|<b\}$ *рядом*

$$G(x,y,k)=G_0(x,y)-\frac{\nu(x)\nu(y)}{2[(1/\pi)\ln k+\gamma+\delta]}+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}k^{2n}\left[\sum_{m=0}^{n}G_{m,n}(x,y)\left(\frac{1}{\pi}\ln k+\gamma\right)^m+\right.$$
$$\left.+\sum_{m=1}^{n+1}G_{-m,n}(x,y)\left(\frac{1}{\pi}\ln k+\gamma+\delta\right)^{-m}\right],\tag{6}$$

где $G_0(x, y)$ — *функция Грина первой краевой задачи для уравнения Лапласа в* Ω, *а функции* $G_{m,n}(x, y)=G_{m,n}(y, x)$, $n=1, 2, \ldots, m=-n-1, \ldots, n$, *принадлежат* $C^\infty(\Omega\times\Omega)\cap C(\bar\Omega\times\bar\Omega)$.

Ряд (6) *сходится абсолютно и равномерно по* k *из* K *и* x *и* y *из* $\bar\Omega_R$, *где* $R\geqslant R'$ *произвольно.*

Заметим, что в теореме 3 не предполагается выпуклость контура Γ; теорема доказывается аналогично соответствующему утверждению ([3, 4]) в случае третьей краевой задачи.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
5 IX 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. П. Михайлов*, ДАН, т. 159, № 4, 756 (1964). [2] *Л. А. Муравей*, ДАН, т. 193, № 5, 996 (1970). [3] *Л. А. Муравей*, ДАН, т. 204, № 4, 780 (1972). [4] *Л. А. Муравей*, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 126, 73 (1973). [5] *Л. А. Муравей*, ДАН, т. 220, № 2 (1975).