Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 6

УДК 517.946.8

МАТЕМАТИКА

О. А. ОЛЕЙНИК

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ И ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЩИХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 20 VIII 1974)

В настоящей работе, основываясь на априорной оценке аналитического продолжения по одному из независимых переменных решения некоторой специальной вспомогательной параболической системы, мы получили теоремы единственности решения краевых задач в неограниченных областях, а также теоремы единственности решения задачи Коши для общих параболических систем в классах растущих в нормах C и L_p функций. Для задачи Коши и систем, параболических по И. Г. Петровскому ([1]), аналогичные классы решений рассматривались в работах ([2–4]). Краевые задачи для общих параболических систем в некоторых функциональных пространствах изучались в ([5]).

Пусть ω — область в эвклидовом пространстве $R^{n+1}_{x,t}=(x_1,\ldots,x_n,t)$, ограниченная плоскостями $t=0$, $t=T$, где $T=\text{const}>0$, и поверхностью γ, которая нигде не касается плоскостей $t=\text{const}$. В ω рассмотрим систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{|\alpha|+2b\beta\leqslant s_k+t_j} a_{kj}^{\alpha\beta}(x,t)D_x^\alpha\frac{\partial^\beta u_j}{\partial t^\beta}=0,\qquad k=1,\ldots,N, \tag{1}$$

где $D_{x_l}=-i\,\partial/\partial x_l$, $l=1,\ldots,n$, $D_x^\alpha=D_{x_1}^{\alpha_1}\ldots D_{x_n}^{\alpha_n}$, $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$, b — целое положительное число; $s_1,\ldots,s_N$, $t_1,\ldots,t_N$ — совокупность целых чисел такая, что $s_j\leqslant 0$, $t_j\geqslant 0$, $j=1,\ldots,N$, $\sum_{j=1}^{N}(s_j+t_j)=2bm$.

Будем предполагать, что система (1) равномерно параболична в ω (см. ([5]), стр. 9; ([6]), стр. 688).

Пусть при $t=0$ заданы начальные условия вида

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{|\alpha|+2b\beta\leqslant \rho_h+t_j} c_{hj}^{\alpha\beta}(x)D_x^\alpha\frac{\partial^\beta u_j}{\partial t^\beta}=0,\qquad h=1,\ldots,m, \tag{2}$$

удовлетворяющие равномерно по x условию дополнительности (см. ([5]), стр. 12). Пусть на γ заданы граничные условия вида

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{|\alpha|+2b\beta\leqslant \sigma_q+t_j} b_{qj}^{\alpha\beta}(x,t)D_x^\alpha\frac{\partial^\beta u_j}{\partial t^\beta}=0,\qquad q=1,\ldots,bm, \tag{3}$$

также удовлетворяющие равномерно условию дополнительности (см. ([5]), стр. 11). Для систем, параболических по И. Г. Петровскому, начальные условия (2) дают обычные условия Коши.

Пусть $\sigma_0=\max\{0,\sigma_1,\ldots,\sigma_{bm}\}$, $t'=\max\{t_1,\ldots,t_N\}$. Введем пространства $C_A^{s,b}$ функций $u(x,t)$ с нормой

$$\|u\|_A^{s,b}=\sum_{|\alpha|+2b\beta\leqslant s}\sup_A\left|D_x^\alpha\frac{\partial^\beta u_j}{\partial t^\beta}\right|$$

и пространства $L_p(A)$ с нормой

$$\|u\|_{L_p(A)} = \left(\int_A |u|^p \, dA \right)^{1/p}.$$

Пусть $\bar{A}$ — замыкание множества A, $A^\eta \equiv A \cap \{t \leqslant \eta\}$. Пусть γ принадлежит классу $C^{\sigma_0+t'+1,\,b}$. Предположим, что для любой точки $(\hat{x}, 0)$, принадлежащей $\bar{\gamma} \cap \{t=0\}$, существует окрестность $O_{\hat{x}}$, содержащая множество $\{x, t;\ |x_j - \hat{x}_j| < d,\ j=1, \ldots, n,\ 0 \leqslant t \leqslant d^{2b}\}$, причем множество $O_{\hat{x}} \cap \bar{\omega}$ гомеоморфно при некотором невырожденном преобразовании координат $F_{\hat{x},0}$: $\{y = f(x, t),\ \tau = t\}$ множеству $H_\rho^{\hat{y}} = \{y, \tau;\ |y_j - \hat{y}_j| < \rho,\ j=1, \ldots, n-1,\ 0 \leqslant y_n - \hat{y}_n < \rho,\ 0 \leqslant \tau < \rho^{2b}\}$, где $\rho = \mathrm{const} \leqslant 1$, $\hat{y} = f(\hat{x}, 0)$, а множество $O_{\hat{x}} \cap \bar{\gamma}$ гомеоморфно $H_\rho^{\hat{y}} \cap \{y_n = \hat{y}_n\}$; $\bar{\gamma} \cap \{0 \leqslant t \leqslant d^{2b}\}$ принадлежит $\{O_{\hat{x}}\}$.

Для точек $\{\hat{x}, \hat{t}\}$ из γ таких, что $\hat{t} \geqslant d^{2b}$, существует окрестность $O_{\hat{x}, \hat{t}}$, содержащая множество $\{x, t;\ |x_j - \hat{x}_j| < d,\ j=1, \ldots, n,\ -d^{2b} < t - \hat{t} \leqslant 0\}$, причем $O_{\hat{x}, \hat{t}} \cap \bar{\omega}^{\hat{t}}$ гомеоморфно при некотором невырожденном преобразовании $F_{\hat{x}, \hat{t}}: \{y = f(x, t),\ \tau = t\}$ множеству $H_\rho^{\hat{y}, \hat{\tau}} = \{y, \tau;\ |y_j - \hat{y}_j| < \rho,\ j=1, \ldots, n-1,\ 0 \leqslant y_n - \hat{y}_n < \rho,\ -\rho^{2b} < \tau - \hat{\tau} \leqslant 0\}$, где $\rho = \mathrm{const} \leqslant 1$, $\hat{y} = f(\hat{x}, \hat{t})$, $\hat{\tau} = \hat{t}$, а множество $O_{\hat{x}, \hat{t}} \cap \bar{\gamma}^{\hat{t}}$ гомеоморфно $H_\rho^{\hat{y}-\hat{\tau}} \cap \{y_n = \hat{y}_n\}$.

Предполагается, что преобразование $F_{x,t}$ и обратное к нему заданы функциями, нормы которых в пространстве $C^{\sigma_0+t'+1,\,b}$ ограничены постоянной K, причем постоянные d и K не зависят от точки (x, t). Обозначим $\omega_r = \{x, t;\ |x| < r,\ 0 < t < T\}$.

Теорема 1. *Пусть*

$$\|a_{kj}^{\alpha\beta}\|_{\omega}^{\sigma_0 - s_k + 1, b} + \|c_{hj}^{\alpha'\beta'}\|_{\bar{\omega} \cap \{t=0\}}^{\sigma_0 - \rho_h + 1, b} + \|b_{qj}^{\alpha'', \beta''}\|_{\gamma}^{\sigma_0 - \sigma_q + 1, b} \leqslant M \tag{4}$$

при $|\alpha| + 2b\beta \leqslant s_k + t_j$, $|\alpha'| + 2b\beta' \leqslant \rho_h + t_j$, $|\alpha''| + 2b\beta'' \leqslant \sigma_q + t_j$, $j, k = 1, \ldots, N$, $h = 1, \ldots, m$, $q = 1, \ldots, bm$, $M = \mathrm{const} > 0$.

Тогда, если $u = (u_1, \ldots, u_N)$ *— решение в* ω *краевой задачи* (1)—(3) *такое, что норма* $\|u_j\|_{\omega'}^{\sigma_0 + t_j + 1, b}$ *конечна для любой ограниченной области* ω', *содержащейся в* ω, *и если*

$$\|u_j(x, t)\|_{L_p(\omega \cap \omega_r)} \leqslant \exp\{\delta_1 r^{2b/(2b-1)}\}, \quad \delta_1 = \mathrm{const} > 0, \quad j = 1, \ldots, N, \tag{5}$$

при некотором p, $1 < p \leqslant \infty$, *и любом* r, $1 \leqslant r < \infty$, *то* $u_j(x, t) \equiv 0$ *в* ω, $j = 1, \ldots, N$.

Заметим, что в случае $p = \infty$ оценка (5) приводит к неравенству

$$|u_j(x, t)| \leqslant \exp\{\delta_1 |x|^{2b/(2b-1)}\} \text{ в } \omega; \quad \delta_1 = \mathrm{const} > 0, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Аналогичная теорема справедлива для решения задачи Коши.

Теорема 2. *Пусть* $u = (u_1, \ldots, u_N)$ *— решение задачи Коши* (1), (2) *в области* $\omega = R_x^n \times (0, T)$ *и пусть*

$$\|a_{kj}^{\alpha\beta}\|_{\omega}^{-s_k+1, b} + \|c_{hj}^{\alpha'\beta'}\|_{R_x^n}^{-\rho_h+1, b} \leqslant M$$

при $|\alpha| + 2b\beta \leqslant s_k + t_j$, $|\alpha'| + 2b\beta' \leqslant \rho_h + t_j$, $k, j = 1, \ldots, N$, $h = 1, \ldots, m$, $M = \mathrm{const} > 0$.

Тогда, если норма $\|u_j\|_{\omega'}^{t_j+1, b}$, $j = 1, \ldots, N$, *конечна для любой ограниченной подобласти* ω' *области* ω *и если*

$$\|u_j(x, t)\|_{L_p(\omega_r)} \leqslant \exp\{\delta_1 r^{2b/(2b-1)}\}, \quad \delta_1 = \mathrm{const} > 0, \quad j = 1, \ldots, N,$$

при некотором p, $1 < p \leqslant \infty$, *и любом* r, $1 \leqslant r < \infty$, *то* $u_j(x, t) \equiv 0$ *в* ω, $j = 1, \ldots, N$.

Доказательства теорем 1, 2 основываются на следующей лемме для вспомогательной краевой задачи. В области $\Omega = \omega \times \{|x_0| < \infty\}$ пространства $R^{n+z}_{x_0,x,t}$ рассмотрим вспомогательную параболическую систему вида

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{|\alpha|+2b\beta\leqslant s_k+t_j} a_{kj}^{\alpha\beta}(x,t)D_x^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial t}+D_{x_0}^{2b}\right)^{\beta}v_j=0,\qquad k=1,\ldots,N,\tag{6}$$

где $D_{x_0}=-i\,\partial/\partial x_0$, с начальными условиями при $t=0$ вида

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{|\alpha|+2b\beta\leqslant\rho_h+t_j} c_{hj}^{\alpha\beta}(x)D_x^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial t}+D_{x_0}^{2b}\right)^{\beta}v_j=0,\qquad h=1,\ldots,m,\tag{7}$$

и с граничными условиями на $\Gamma=\gamma\times\{|x_0|<\infty\}$ вида

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{|\alpha|+2b\beta\leqslant\sigma_q+t_j} b_{qj}^{\alpha\beta}(x,t)D_x^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial t}+D_{x_0}^{2b}\right)^{\beta}v_j=0,\qquad q=1,\ldots,bm.\tag{8}$$

Легко показать, что система (6) в Ω с начальными условиями (7) при $t=0$ и граничные условия (8) на Γ также удовлетворяют равномерно условиям дополнительности.

Лемма. *Пусть ω_1 и ω_2 — ограниченные подобласти области ω и $\omega^1\subset\subset\omega^2$. Положим $\Omega^1=\omega^1\times\{|x_0|<A\}$ и $\Omega^2=\omega^2\times\{|x_0|<A+1\}$, $A=\mathrm{const}>0$. Пусть $\rho(\hat{x}_0,\hat{x},\hat{t})$ равно верхней грани ρ таких, что $S_\rho^{\hat{x}_0,\hat{x},\hat{t}}\cap\{\Omega\setminus\Omega^2\}$ пусто, где $S_\rho^{\hat{x}_0,\hat{x},\hat{t}}=\{x_0,\ x,\ t;\ |x_0-\hat{x}_0|<\rho,\ |x-\hat{x}|<\rho,\ -\rho^{2b}<t-\hat{t}\leqslant0\}$, а $(\hat{x}_0,\ \hat{x},\ \hat{t})\in\Omega^1$, и пусть $\rho_0=\min\limits_{\Omega^1}\rho(\hat{x}_0,\ \hat{x},\ \hat{t})\neq0$. Предположим, что выполнено условие (4).*

Тогда любое решение $v=(v_1,\ldots,v_N)$ задачи (6) — (8) такое, что $v_j\in C_{\Omega^2}^{\sigma_0+t_j+1,b}$, $j=1,\ldots,N$, аналитически продолжается по переменной x_0+ix_0' в область $Q_\delta(\Omega^1)=\{x_0,\ x_0',\ x,\ t;\ (x_0,\ x,\ t)\in\Omega^1,\ |x_0'|<\delta\}$ вместе с производными v_j до порядка σ_0+t_j-1 и при $|\alpha|+2b\beta\leqslant\sigma_0+t_j-1$ справедливы оценки

$$\sum_{j=1}^{N}\sup_{Q_\delta(\Omega^1)}\left|D_x^{\alpha}\frac{\partial^{\beta}v_j}{\partial t^{\beta}}\right|\leqslant C_1\sum_{j=1}^{N}\sup_{\Omega^2}|v_j|,$$

$$\sum_{j=1}^{N}\sup_{Q_\delta(\Omega^1)}\left|D_x^{\alpha}\frac{\partial^{\beta}v_j}{\partial t^{\beta}}\right|\leqslant C_2\sum_{j=1}^{N}\|v_j\|_{L_p(\Omega^2)},\tag{9}$$

где постоянные δ, C_1, C_2 зависят от коэффициентов системы (6) и условий (7), (8), а также от d, K, ρ_0, p.

Эта лемма доказывается с помощью теоремы 4.11 работы ([5]) методом, аналогичным методу Морри — Ниренберга ([7]).

Докажем теорему 1. Теорема 2 доказывается аналогично. Функции $v_j=e^{i\mu x_0}w_j(x,\ t)$, $j=1,\ldots,N$, $\mu=\mathrm{const}\in R_\mu^1$, удовлетворяют в Ω системе (6) и условиям (7) и (8), если $w_j(x,\ t)$, $j=1,\ldots,N$, удовлетворяют в ω системе

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{|\alpha|+2b\beta\leqslant s_k+t_j} a_{kj}^{\alpha\beta}(x,t)D_x^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mu^{2b}\right)^{\beta}w_j=0,\qquad k=1,\ldots,N,\tag{10}$$

начальным условиям при $t=0$ вида

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{|\alpha|+2b\beta\leqslant\rho_h+t_j} c_{hj}^{\alpha\beta}(x)D_x^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mu^{2b}\right)^{\beta}w_j=0,\qquad h=1,\ldots,m.\tag{11}$$

и граничным условиям на γ

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{|\alpha|+2b\beta\leqslant\sigma_q+t_j} b_{qj}^{\alpha\beta}(x,t)\,D_x^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mu^{2b}\right)^{\beta} w_j=0, \qquad q=1,\ldots,mb. \qquad (12)$$

Очевидно, решением краевой задачи (10) — (12) являются функции $w_j=e^{-\mu^{2b}t}u_j(x,t)$, $j=1,\ldots,N$. Пусть $\omega_r^{1}=\omega\cap\omega_r\cap\{t\leqslant T_1\}$ и $\Omega_r^{1}=\Omega\cap\Omega_r\cap\{t\leqslant T_1\}$, где $\Omega_r=\omega_r\times\{|x_0|<r\}$, $T_1=\text{const}$, $0<T_1\leqslant T$. Для решения $v=(v_1,\ldots,v_N)$ краевой задачи (6) — (8) справедлива лемма. Поэтому при любом $r=1, 2,\ldots$

$$\sum_{j=1}^{N}\sup_{Q_{\delta}(\Omega^1{}_r)}|v_j|\leqslant C_1\sum_{j=1}^{N}\sup_{\Omega^1{}_{r+1}}|v_j|,$$

где положительные постоянные δ и C_1 не зависят от r. Отсюда легко получаем, что

$$\sum_{j=1}^{N}\sup_{\omega^1{}_r}|w_j|\leqslant\exp\{\ln C_1-\delta\mu\}\sum_{j=1}^{N}\sup_{\omega^1{}_{r+1}}|w_j|,$$

и, следовательно, для любого r_0

$$\sum_{j=1}^{N}\sup_{\omega^1{}_{r_0}}|w_j|\leqslant\exp\{r(\ln C_1-\delta\mu)\}\sum_{j=1}^{N}\sup_{\omega^1{}_{r_0+r}}|w_j|.$$

В силу (9)

$$\sum_{j=1}^{N}\sup_{\omega^1{}_{r_0+r}}|w_j|\leqslant C_0[2(r_0+r+1)]^{1/p}\sum_{j=1}^{N}\|w_j\|_{L_p(\omega^1{}_{r_0+r+1})},$$

где постоянная C_0 не зависит от r. Так как $w_j=\exp\{-\mu^{2b}t\}u_j$, то

$$\sum_{j=1}^{N}\sup_{\omega^1{}_{r_0}}|u_j|\leqslant C_0[2(r_0+r+1)]^{1/p}\exp\{r(\ln C_1-\delta\mu)+\mu^{2b}T_1\}\sum_{j=1}^{N}\|u_j\|_{L_p(\omega^1{}_{r_0+r+1})}.$$

Выберем $\mu=r^{1/(2b-1)}$ и воспользуемся условием (5) теоремы 1. Получим

$$\sum_{j=1}^{N}\sup_{\omega^1{}_{r_0}}|u_j|\leqslant C_0[2(r_0+r+1)]^{1/p}\exp\{r(\ln C_1-\delta r^{1/(2b-1)})+$$
$$+r^{2b/(2b-1)}T_1+\delta_1(r_0+r+1)^{2b/(2b-1)}\}. \qquad (13)$$

Если $\delta>T_1+\delta_1$, то правая часть неравенства (13) стремится к нулю при $r\to\infty$. Следовательно, $|u_j(x,t)|\equiv0$ в ω при $t\leqslant T_1$, $j=1,\ldots,N$. Постоянную δ_1 в условии (5) можно считать меньше δ, так как при преобразовании координат: $x_0=\rho x_0'$, $x=\rho x'$, $t=\rho^{2b}t'$ и замене неизвестных функций $v_j=\rho^{t_j}v_j'$, $j=1,\ldots,N$, при $0<\rho\leqslant1$ постоянные δ и C_1, C_2 в неравенствах (9) сохраняются. Далее, повторяя доказательство для области $\omega\cap\{T_1<t<T_2\}$, затем $\omega\cap\{T_2<t<T_3\}$ и т. д., получим, что $u_j\equiv0$ в ω, $j=1,\ldots,N$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Институт проблем механики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
12 VIII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *И. Г. Петровский*, Бюлл. МГУ, А, т. 1, в. 7, 1 (1938). [2] *А. Н. Тихонов*, Матем. сб., т. 42, № 2, 199 (1935). [3] *О. А. Ладыженская*, Матем. сб., т. 27, № 2, 175 (1950). [4] *С. Д. Эйдельман*, Параболические системы, «Наука», 1964. [5] *В. А. Солонников*, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 83, 3 (1965). [6] *О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, В. А. Солонников*, Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, «Наука», 1967. [7] *C. Morrey, L. Nirenberg*, Comm. Pure Appl. Math., v. 10, 271 (1957).