Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 6

УДК 513.835 *МАТЕМАТИКА*

М. И. СТЕСИН

АЛЕКСАНДРОВСКИЕ ПОПЕРЕЧНИКИ КОНЕЧНОМЕРНЫХ МНОЖЕСТВ И КЛАССОВ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 26 VII 1974)

1. Пусть C — подмножество банахова пространства X. Величину

$$a_n(C,X)=\inf_{(K_n,F)}\sup_{x\in C}\|x-Fx\|,$$

где нижняя грань берется по всевозможным парам (K_n,F), в которых K_n—n-мерный симплициальный комплекс, а F — непрерывное отображение C в K_n, называют n-мерным поперечником множества C по Александрову. Если C симметрично относительно нуля, а нижняя грань берется лишь по тем парам, где K_n симметрично относительно нуля и F — нечетное непрерывное отображение, то соответствующая величина, обозначаемая $\tilde{a}_n(C,X)$, называется нечетным поперечником множества C по Александрову.

Величина

$$d_n(C,X)=\inf_{L_n}\sup_{x\in C}\inf_{y\in L_n}\|x-y\|,$$

где нижняя грань берется по всевозможным аффинным n-мерным подпространствам L_n, называется n-поперечником множества C по Колмогорову.

2. Пусть $r=(r_1,\ldots,r_n)$, $r_i>0$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. Через $B_p^n(r)$ мы будем обозначать множество

$$B_p^n(r)=\left\{x\in\mathbf{R}^n\ \Bigg|\ \left(\sum_{i=1}^n\left(\frac{|x_i|}{r_i}\right)^p\right)^{1/p}\leqslant1\right\},$$

а через l_s^n — пространство R^n с нормой

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^s\right)^{1/s}.$$

Положим

$$\alpha_k(r;p,s)=\max_{\substack{(i_1,\ldots,i_{k+1})\\ i_q\neq i_t}}\left(\sum_{j=1}^{k+1}r_{i_j}^{ps/(p-s)}\right)^{1/s-1/p},$$

$$\beta_k(r;p,s)=\alpha_{n-k-1}^{-1}(1/r;s,p),\qquad 1/r=(1/r_1,\ldots,1/r_n).$$

Теорема 1. *При $p<s$ k-мерный поперечник по Александрову множества $B_p^n(r)$ в пространстве l_s^n совпадает с нечетным александровским поперечником и равен*

$$a_k(B_p^n(r),l_s^n)=\tilde{a}_k(B_p^n(r),l_s^n)=\alpha_k(r;p,s).$$

Доказательство этой теоремы при произвольных $p<s$ практически ничем не отличается от случая $p=1$, $s=2$, разобранного в ([3]). Отметим

только, что при каждом $k=0, 1, \ldots, n-1$ существует нечетное отображение F_k множества $B_p^n(r)$, являющееся $\alpha_k(r; p, s)$-сдвигом и переводящее $B_p^n(r)$ в объединении k-мерных координатных плоскостей пространства l_s^n.

Пусть L_n — n-мерное подпространство банахова пространства X, C — симметричное относительно нуля звездное подмножество L_n, для которого 0 является внутренней (относительно L_n) точкой. Граница ∂C множества C с идентификацией диаметрально противоположных точек реализует $(n-1)$-мерное действительное проективное пространство RP^{n-1}. Функция $\|x\|$ четная, поэтому ее сужение на ∂C можно рассматривать как функцию на RP^{n-1}. Обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ числа Люстерника — Шнирельмана этой функции (см. [1]).

Теорема 2. *Нечетный k-поперечник по Александрову множества C удовлетворяет неравенству $\tilde{a}_k(C, X) \geqslant \lambda_{n-k}$.*

Теорема 3. *Нечетный k-мерный поперечник по Александрову множества $B_p^n(r)$ в пространстве l_s^n* при $1 \leqslant s < p \leqslant \infty$ *совпадает с колмогоровским k-поперечником и равен $\tilde{a}_k(B_p^n(r), l_s^n) = d_k(B_p^n(r), l_s^n) = \beta_k(r; p, s)$.*

Доказательство. Неравенство $d_k(B_p^n(r), l_s^n) \leqslant \beta_k(r; p, s)$ очевидно, так как проектор $P_{i_1, \ldots, i_k}$, ставящий точке $x=(x_1, \ldots, x_n)$ в соответствие точку $y=(y_1, \ldots, y_n)$, где $y_i = x_i$ при $i=i_1, \ldots, i_k$, $y_i=0$ при $i \neq i_1, \ldots, i_k$, является не более чем $\left(\sum\limits_{i \neq i_1, \ldots, i_k} r_i^{ps/(p-s)}\right)^{1/s-1/p}$-сдвигом множества $B_p^n(r)$ в k-мерную плоскость. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — числа Люстерника — Шнирельмана функции $\|x\|_s$ на поверхности множества $B_p^n(r)$.

Из теоремы 1 следует неравенство

$$\lambda_{n-k} \geqslant \beta_k(r; p, s).$$

В силу теоремы 2 $\tilde{a}_k(B_p^n(r), l_s^n) \geqslant \lambda_{n-k} \geqslant \beta_k(r; p, s)$. Теорема доказана.

Следствие. Нечетный александровский и колмогоровский k-поперечники множества $B_p^n(1, \ldots, 1)$ равны

$$\tilde{a}_k(B_p^n(1, \ldots, 1), l_s^n) = d_k(B_p^n(1, \ldots, 1), l_s^n) = (n-k)^{1/s-1/p}, \quad p > s.$$

3. На отрезке $[0, 1]$ рассмотрим класс функций, у которых $(r-1)$-я производная абсолютно непрерывна, r-я принадлежит пространству $L_p[0, 1]$, $p \geqslant 1$, и имеет в нем норму, не превосходящую 1, и которые удовлетворяют условию

$$x(0) = \dot{x}(0) = \ldots = x^{(r-1)}(0) = 0.$$

Такой класс мы будем обозначать $\mathring{W}_p^r$.

В этом пункте мы вычислим слабую асимптотику александровских поперечников классов $\mathring{W}_p^r$ в пространствах $L_s[0, 1]$ при произвольных p, s, r ($s \neq \infty$ при $r=1$, $p=1$).

Рассмотрим функции

$$\psi_{r,\tau}(t) = \frac{1}{(r-1)!}(t-\tau)_+^{r-1} = \begin{cases} \dfrac{1}{(r-1)!}(t-\tau)^{r-1} & \text{при } t \geqslant \tau, \\ 0 & \text{при } t \leqslant \tau. \end{cases}$$

Каждая функция $x(t) \in \mathring{W}_p^r$ представляется в виде

$$x(t) = \int\limits_0^1 x^{(r)}(\tau) \psi_{r,\tau}(t) \, d\tau.$$

Зафиксируем точки $0=t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ и рассмотрим следующее отображение G_r класса $\mathring{W}_1^r$:

$$G_r x(t) = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} x^{(r)}(\tau) \left[\frac{t_i - \tau}{t_i - t_{i-1}} \psi_{r, t_{i-1}}(t) + \frac{\tau - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \psi_{r, t_i}(t) \right] d\tau.$$

Это отображение непрерывно и $\|x(t)-G_1x(t)\|_p\leqslant\max\limits_i(t_i-t_{i-1})^{1/p}$, $p<\infty$, $\|x(t)-G_rx(t)\|_\infty\leqslant\max(t_i-t_{i-1})$, $r\geqslant2$. Непосредственно отсюда вытекает

Лемма 1. *Александровские поперечники классов $\mathring{W}_1^r$ удовлетворяют соотношениям*

$$a_n(\mathring{W}_1^1,\ L_s[0,1])\leqslant a_n(O_{1,s},\ L_s[0,1])+n^{-1},\quad 1\leqslant s<\infty;$$

$$a_n(\mathring{W}_1^r,\ L_s[0,1])\leqslant a_n(O_r, L_s[0,1])+n^{-r},\quad 1\leqslant s\leqslant\infty,\quad r\geqslant2,$$

где $O_{1,s}$ и O_r — октаэдры,

$$O_{1,s}=\operatorname{conv}\{\pm\psi_{1,in^{-s}},\ i=0,1,\dots,n^s-1\},$$

$$O_r=\operatorname{conv}\{\pm\psi_{r,in^{-r}},\ i=0,1,\dots,n^r-1\}.$$

Пусть $O=\operatorname{conv}\{\pm e_1,\dots,\pm e_N)$ — конечномерный октаэдр в банаховом пространстве X, а $T=\operatorname{conv}\{e_1,\dots,e_n)$ — соответствующий симплекс.

Лемма 2. *Поперечники по Александрову множеств O и T удовлетворяют соотношению*

$$a_{2n+2}(O,X)\leqslant a_n(T,X).$$

Обозначим через $T_{1,p}$ и T_r симплексы

$$T_{1,p}=\operatorname{conv}\{\psi_{1,in^{-p}},\ i=0,1,\dots,n^p-1\},$$

$$T_r=\operatorname{conv}\{\psi_{r,in^{-r}},\ i=0,1,\dots,n^r-1\}.$$

Лемма 3. *Поперечники симплексов $T_{1,p}$ и T_r следующим образом оцениваются сверху:*

$$a_n(T_{1,p},\ L_p[0,1])\leqslant A_1n^{-1},\quad 1\leqslant p<\infty;\tag{1}$$

$$a_n(T_r,\ L_p[0,1])\leqslant A_rn^{-r},\quad 1\leqslant p\leqslant\infty,\quad r\geqslant2,\tag{2}$$

где A_1, A_r — константы, не зависящие от n.

Доказательство. Положим

$$\varphi_{1,in^{-p}}=\begin{cases}\psi_{1,in^{-p}} & \text{при } t\notin[in^{-p}, in^{-p}+n^{-2p}],\\ n^{2p}(t-in^{-p}) & \text{при } t\in[in^{-p}, in^{-p}+n^{-2p}];\end{cases}$$

$$\dot\varphi_{r,in^{-p}}=\varphi_{r-1,in^{-p}},\qquad \varphi_{r,in^{-p}}(0)=0.$$

Симплекс T_r ($T_{1,p}$) переводится в симплекс $\tilde T_r=\operatorname{conv}\{\varphi_{r,in^{-r}},\ i=0,1,\dots,n^r-1\}$ ($\tilde T_{1,p}=\operatorname{conv}\{\varphi_{1,in^{-p}},\ i=0,1,\dots,n^p-1\}$) не более чем n^{-2r} (n^{-2})-сдвигом, поэтому достаточно оценить поперечники симплексов $\tilde T_r$ и $\tilde T_{1,p}$.

Пусть $x(t)\in\tilde T_{1,p}$. Обозначим через t_k решение уравнения $x(t)=k/n-t$, $k=1,\dots,2n$. Ясно, что это уравнение имеет и только одно решение. Рассмотрим функцию

$$\bar x(t)=\begin{cases}0 & \text{при } 0\leqslant t<t_1,\\ x(t_k) & \text{при } t_k\leqslant t<t_{k+1}.\end{cases}$$

Можно показать, что отображение $x(t)\to\bar x(t)$ непрерывно на $\tilde T_{1,p}$ в метрике $L_p[0,1]$, является не более чем n^{-1}-сдвигом и переводит $\tilde T_{1,p}$ в компакт размерности не выше чем $2n$. Таким образом, мы получаем неравенство (1).

Множество $(r-1)$-х производных функций из $\tilde T_r$ образует симплекс $\tilde T_{1,r}$. Для функции $x^{(r-1)}(t)$, где $x(t)\in\tilde T_r$, так же как и раньше, найдем точки $t_1,\dots,t_{2n}$. Ясно, что $t_i-t_{i-1}\geqslant n^{-2r-2}$. Положим

$$\bar{x}(t)=$$
$$=\begin{cases} 0 & \text{при } 0\leqslant t\leqslant t_1-{}^1/{}_3n^{-2r-2},\\ \left(\dfrac{k}{n}-t_k\right)\dfrac{(t-t_k)^{r-1}}{(r-1)!}+x^{(r-2)}(t_k)\dfrac{(t-t_k)^{r-2}}{(r-2)!}+\ldots+x(t_k) & \\ & \text{при } t_{k-1}\leqslant t\leqslant t_k-{}^1/{}_3n^{-2r-2},\\ 3n^{2r+2}(x(t_k)-\bar{x}(t_k-{}^1/{}_3n^{-2r-2}))(t-t_k) & \text{при } t_k-{}^1/{}_3n^{-2r-r}\leqslant t\leqslant t_k \end{cases}$$

и рассмотрим отображение $x(t)\to\bar{x}(t)$. Это отображение оказывается непрерывным в пространстве $L_p[0, 1]$ при любом $1\leqslant p\leqslant\infty$. Оно переводит $\tilde{T}_r$ в компакт размерности не выше $2rn$ и $\|x(t)-\bar{x}(t)\|_\infty\leqslant n^{-r}$, поэтому неравенство (2) также имеет место. Лемма доказана.

Доказательство следующей леммы мало чем отличается от доказательства леммы 3.

Лемма 4. *При $p>1$ поперечники по Александрову множеств $\mathring{W}_p{}^1$ в пространстве $C[0, 1]$ следующим образом оцениваются сверху:*

$$a_n(\mathring{W}_p{}^1, C[0, 1])\leqslant A_p n^{-1},$$

где A_p — константа, не зависящая от n.

Теорема 4. *Александровские поперечники множеств $\mathring{W}_p{}^r$ в пространствах $L_s[0, 1]$ слабо эквивалентны n^{-r}:*

$$a_n(\mathring{W}_1{}^1, L_s[0, 1])\asymp n^{-1},\quad s<\infty;$$
$$a_n(\mathring{W}_p{}^1, L_s[0, 1])\asymp n^{-1},\quad p>1,\quad 1\leqslant s\leqslant\infty;$$
$$a_n(\mathring{W}_p{}^r, L_s[0, 1])\asymp n^{-r},\quad 1\leqslant p\leqslant\infty,\quad 1\leqslant s\leqslant\infty,\quad r\geqslant 2.$$

Доказательство. Неравенства $a_n(\mathring{W}_p{}^r, L_s[0, 1])\leqslant A_r n^{-r}$ при произвольных p, s и $r\geqslant 2$, $a_n(\mathring{W}_1{}^1, L_s[0, 1])\leqslant A_1 n^{-1}$ и $a_n(\mathring{W}_p{}^1, L_s[0, 1])\leqslant A_p n^{-1}$ при $s<\infty$ следуют из лемм 1—3 и того, что $\mathring{W}_p{}^r\subset\mathring{W}_1{}^r$. Неравенство $a_n(\mathring{W}_p{}^1, C[0, 1])\leqslant A_p n^{-1}$ при $p>1$ вытекает из леммы 4. Далее, обозначим через $h_r(t)$ функции Витушкина на отрезке $[0, 2^r\tau]$ (см. ([2])). Эти функции определяются так:

$$h_1(t)=\begin{cases} t & \text{при } 0\leqslant t\leqslant \tau/2,\\ \tau-t & \text{при } \tau/2\leqslant t\leqslant\tau;\end{cases}$$

$$\dot{h}_r(t)=\begin{cases} h_{r-1}(t) & \text{при } 0\leqslant t\leqslant 2^{r-1}\tau, \quad \dot{h}_r(0)=0.\\ -h_{r-1}(t-2^{r-1}\tau) & \text{при } 2^{r-1}\tau\leqslant t\leqslant 2^r\tau;\end{cases}$$

Положим $\tau=(2^{r+1}n)^{-1}$ и

$$h_{i,r}(t)=\begin{cases} 0 & \text{при } t\notin[i/(2n), (i+1)/(2n)]\\ h_r(t-i/(2n)) & \text{при } t\in[i/(2n), (i+1)/(2n)].\end{cases}$$

Обозначим через L линейную оболочку функций $h_{i,r}(t)$, $i=0, 1, \ldots, 2n-1$. Функция $x(t)=x_0h_{0,r}(t)+\ldots+x_{2n-1}, h_{2n-1,r}(t)$ имеет в $L_s[0, 1]$ норму $\|x(t)\|_s=(\sum\limits_{i=0}^{2n-1}|x_i|^s)^{1/s}\cdot\|h_r(t)\|_s$. Это означает, что пространство $L_s[0, 1]$ индуцирует на L метрику $l_s{}^{2n}$. Куб $I^{2n}=\{x(t)=x_0h_{0,r}(t)+\ldots+x_{2n-1}h_{2n-1,r}\times\times(t)\mid |x_i|\leqslant 1\}$ принадлежит любому $\mathring{W}_p{}^r$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. В силу теоремы 3 отсюда следует, что $a_{n/2}(\mathring{W}_p{}^r, L_s[0, 1])\geqslant\tilde{a}_n(\mathring{W}_p{}^r, L_s[0, 1])\geqslant\tilde{a}_n(I^{2n}, L_s[0, 1])=\tilde{a}_n(I^{2n}, L)=n^{1/s}\cdot\|h_r(t)\|_s\geqslant K_r n^{-r}$. Теорема доказана.

В заключение автор благодарит В. М. Тихомирова за внимание к работе и полезные обсуждения.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
21 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Л. А. Люстерник, Л. Г. Шнирельман,* Топологические методы в вариационных задачах, 1930. [2] *А. Н. Колмогоров, В. М. Тихомиров,* УМН, т. 14, 2, 3 (1959). [3] *М. И. Стесин,* Вестн. Московск. унив., т. 3, 30 (1973).