

А. Б. ХАРАЗИШВИЛИ

ОДИН ПРИМЕР ИНВАРИАНТНОЙ МЕРЫ

(Представлено академиком И. Н. Векун 17 VI 1974)

Пусть G — произвольная подгруппа группы \mathcal{D}_n всех изометрических преобразований n -мерного евклидова пространства E_n . G -мерой будем называть всякую G -инвариантную меру μ такую, что $\mu([0, 1]^n) = 1$.

Если в G входит всюду плотное в E_n множество параллельных переносов, то, как легко видеть, область определения любой G -меры содержит борелевский класс B_n . В дальнейшем изложении будет предполагаться, что некоторая часть G есть плотное в E_n множество трансляций E_n , а рассматриваемые G -меры будут считаться полными. Как принято, через L_n мы обозначим класс частей E_n , измеримых в смысле Лебега, а через l_n — лебеговскую меру в пространстве E_n .

Пусть μ_0 — G -мера. Множество $X \subset E_n$ назовем G -исчерпывающим относительно μ_0 , если найдется такое счетное семейство $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ элементов G , что $\mu_0(E_n \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} g_i(X)) = 0$.

Следующие два соотношения часто берутся в качестве дополнительных аксиом теории G -инвариантных мер.

1) Каждая μ_0 -измеримая часть E_n представима в виде $(XUY_1) \setminus Y_2$, где $X \in L_n$, $\mu_0(Y_1) = \mu_0(Y_2) = 0$.

2) Произвольное μ_0 -измеримое подмножество E_n со строго положительной мерой является G -исчерпывающим относительно μ_0 .

Без труда устанавливается истинность импликации 1) \Rightarrow 2). Ниже приводится пример G -меры, для которой обратная импликация не верна. Заметим, что если на G не накладывать никаких условий, то из одного свойства 2) не вытекает даже, что группа G не дискретна.

Лемма 1. Существует разбиение $\{M, K, T\}$ пространства E_n такое, что справедливы соотношения:

а) $(\forall f)$ (f — собственное движение $E_n \Rightarrow \text{Card}(f(M) \Delta M) < 2^{s_0}$ & $\text{Card}(f(K) \Delta K) < 2^{s_0}$);

б) $(\forall f)$ (f — несобственное движение $E_n \Rightarrow \text{Card}(f(M) \Delta K) < 2^{s_0}$ & $\text{Card}(f(K) \Delta M) < 2^{s_0}$);

в) $(\forall f)$ (f — изометрическое преобразование $E_n \Rightarrow \text{Card}(f(T) \Delta T) < 2^{s_0}$);

г) $(\forall F)$ (F — замкнутое подмножество E_n строго положительной меры $\Rightarrow \text{Card}(F \cap M) = \text{Card}(F \cap K) = \text{Card}(F \cap T) = 2^{s_0}$). В частности, M, K и T являются l_n -массивными множествами в E_n .

Построение указанного разбиения можно осуществить методом трансфинитной индукции, воспользовавшись тем фактором, что системой образующих \mathcal{D}_n служит множество ортогональных отражений относительно аффинных гиперплоскостей в E_n . В самом деле, обозначим через φ начальное порядковое число мощности континуума и пусть $(F_\xi)_{\xi < \varphi}$ — φ -последовательность всех замкнутых частей E_n со строго положительной мерой, причем любое замкнутое множество F с $l_n(F) > 0$ встречается в семействе $(F_\xi)_{\xi < \varphi}$ континуальное число раз. Пусть далее $(\Gamma_\xi)_{\xi < \varphi}$ — φ -последовательность всевозможных гиперплоскостей в E_n . Тогда индукцией легко определяются три семейства $(M_\xi)_{\xi < \varphi}$, $(K_\xi)_{\xi < \varphi}$, $(T_\xi)_{\xi < \varphi}$ подмножеств E_n , которые обладают следующими свойствами:

1⁰) $(\forall \xi) (\forall \zeta) (\forall \eta) (\xi < \varphi \ \& \ \zeta < \varphi \ \& \ \eta < \varphi \Rightarrow M_\xi \cap K_\zeta = K_\zeta \cap T_\eta = T_\eta \cap M_\xi = \emptyset)$;

2⁰) $(\forall \xi) (\forall \eta) (\xi < \varphi \ \& \ \eta < \varphi \ \& \ \xi \neq \eta \Rightarrow M_\xi \cap M_\eta = K_\xi \cap K_\eta = T_\xi \cap T_\eta = \emptyset)$;

3⁰) $(\forall \xi) (\xi < \varphi \Rightarrow (F_\xi \cap M_\xi \neq \emptyset \ \& \ F_\xi \cap T_\xi \neq \emptyset))$;

4⁰) $(\forall \eta) (\eta < \varphi \Rightarrow T_\eta \text{ и } M_\eta \cup K_\eta \text{ представляют собой классы интранзитивности группы } G_\eta, \text{ порождаемой симметриями относительно гиперплоскостей семейства } (\Gamma_\xi)_{\xi < \eta})$;

5⁰) $(\forall \eta) (\forall x) (\eta < \varphi \ \& \ x \in M_\eta \Rightarrow M_\eta = G_\eta^+(x))$, где G_η^+ есть группа собственных движений из G_η ;

6⁰) $(\forall \eta) (\eta < \varphi \Rightarrow G_\eta \text{ действует свободно на } M_\eta \cup K_\eta)$.

Заметим, что выполнимость п. 6⁰) вытекает из того, что каждое F_η содержит континуальное множество точек общего положения.

Построив таким образом φ -последовательности $(M_\xi)_{\xi < \varphi}$, $(K_\xi)_{\xi < \varphi}$, $(T_\xi)_{\xi < \varphi}$, в качестве M , K , T берем соответственно $\bigcup_{\xi < \varphi} M_\xi$, $\bigcup_{\xi < \varphi} K_\xi$, $E_n \setminus \bigcup_{\xi < \varphi} (M_\xi \cup K_\xi)$.

Рассмотрим теперь σ -алгебру частей E_n , порожденную множеством $\{M, K, T\} \cup L_n$, где $\{M, K, T\}$ — разбиение, о котором говорится в предыдущей лемме. Эта σ -алгебра есть класс подмножеств E_n вида $(X \cap M) \cup (Y \cap K) \cup (Z \cap T)$, $X \in L_n$, $Y \in L_n$, $Z \in L_n$.

Лемма 2. Пусть $X \in L_n$, $Y \in L_n$, $Z \in L_n$. Положим $\lambda((X \cap M) \cup (Y \cap K) \cup (Z \cap T)) = \frac{1}{2}(l_n(X) + l_n(Y))$. Тогда написанное равенство определяет меру λ на σ -алгебре с системой образующих $\{M, K, T\} \cup L_n$.

Доказательство сводится к проверке импликаций

$$\begin{aligned} & (\{X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2\} \subset L_n \ \& \ (X_1 \cap M) \cup (Y_1 \cap K) \cup (Z_1 \cap T) = \\ & \quad = (X_2 \cap M) \cup (Y_2 \cap K) \cup (Z_2 \cap T)) \\ & \Rightarrow (l_n(X_1) = l_n(X_2) \ \& \ l_n(Y_1) = l_n(Y_2) \ \& \ l_n(Z_1) = l_n(Z_2)), \\ & (\{X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2\} \subset L_n \ \& \ ((X_1 \cap M) \cup (Y_1 \cap K) \cup (Z_1 \cap T)) \cap \\ & \quad \cap ((X_2 \cap M) \cup (Y_2 \cap K) \cup (Z_2 \cap T)) = \emptyset) \\ & \Rightarrow (l_n(X_1 \cap X_2) = 0 \ \& \ l_n(Y_1 \cap Y_2) = 0 \ \& \ l_n(Z_1 \cap Z_2) = 0), \end{aligned}$$

которые, в свою очередь, следуют из соотношения г).

Если $\mathcal{F}(E_n)$ — множество всех неkontинуальных частей E_n , то мера λ , введенная выше, естественным образом продолжается до меры $\tilde{\lambda}$, определяемой на σ -алгебре, порожденной $\mathcal{F}(E_n) \cup \{M, K, T\} \cup L_n$. Для всякого $X \in \mathcal{F}(E_n)$ имеем $\tilde{\lambda}(X) = 0$. Ясно также, что $\tilde{\lambda}$ является продолжением меры Лебега в E_n .

Предложение 1. Мера $\tilde{\lambda}$ \mathcal{D}_n -инвариантна. Кроме того, любая \mathcal{D}_n -мера μ , заданная на σ -алгебре с множеством образующих $\mathcal{F}(E_n) \cup \{M, K, T\} \cup L_n$, и удовлетворяющая условию 2) и равенству $\mu(T) = 0$, совпадает с $\tilde{\lambda}$.

Говорят, что часть X пространства E_n обладает свойством однозначности в классе A G -мер, если соотношение $(\exists \mu) (\mu \in A \ \& \ X \text{ принадлежит области определения } \mu \ \& \ t = \mu(X))$ однозначно по t (1).

Однозначно определяемой мерой в классе A будем называть каждую G -меру из A , заданную на σ -алгебре множеств со свойством однозначности в A .

G -абсолютно нульмерной частью E_n назовем всякое множество $X \subset E_n$, для которого справедливо следующее соотношение: при произвольном счетном семействе $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ изометрических преобразований из G объединение семейства $(g_i(X))_{i \in \mathbb{N}}$ имеет свойство однозначности в классе всех G -мер и найдется G -мера μ такая, что $\mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} g_i(X)) = 0$ (2). Очевидно, что $((X \in L_n \ \& \ l_n(X) = 0) \Rightarrow X \text{ } \mathcal{D}_n\text{-абсолютно нульмерно})$. При $n \geq 1$ можно доказать существование \mathcal{D}_n -абсолютно нульмерных частей E_n , не измеримых в смысле Лебега (3).

Скажем, что G -инвариантная мера μ нормальна, если любой элемент ее области определения представим в виде $(X \cup X_1) \setminus X_2$, где $X \in L_n$, а X_1 и

X_2 — G -абсолютно нульмерные подмножества E_n . Ясно, что каждая нормальная мера будет и однозначно определяемой в классе мер, для которых выполняется соотношение 2). Обратное неверно, как показывает

Предложение 2. Пусть G — группа движений E_n , $n \geq 1$, порождаемая параллельными переносами и центральными симметриями.

Тогда существует однозначно определяемая G -мера со свойством 2), не являющаяся нормальной.

Построение этой меры аналогично построению меры $\tilde{\lambda}$.

Легко видеть, что элементы разбиения $\{M, K, T\}$ измеримы по отношению к $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\lambda}(T) = 0$, $\tilde{\lambda}(M) = \tilde{\lambda}(K) = +\infty$. В то же время множества M и K не обладают ни одной точкой плотности относительно $\tilde{\lambda}$, поскольку для произвольного куба Π $\tilde{\lambda}(\Pi \cap M) = \tilde{\lambda}(\Pi \cap K) = \frac{1}{2}l_n(\Pi)$. На меры, удовлетворяющие соотношению 1), без изменений переносится классическая теорема о точках плотности. Поэтому справедливо

Предложение 3. Мера $\tilde{\lambda}$ имеет свойство 1) и не обладает свойством 2).

Отметим под конец, что существуют G -меры, для которых соотношение 2) перестает быть верным. Они строятся исходя из разбиения пространства E_n , $n \geq 1$, на почти G -инвариантные l_n -массивные множества. Последние играют важную роль в вопросах, связанных с продолжениями лебеговской меры. В частности, используя лемму 1, можно так продолжить меру Лебега в E_n , $n \geq 1$, что полученная мера будет \mathcal{D}_n^+ -инвариантной (\mathcal{D}_n^+ — группа всех собственных движений E_n), но не инвариантной по отношению к несобственным изометрическим преобразованиям E_n .

Научно-исследовательский институт
прикладной математики
Тбилисского государственного университета

Поступило
5 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Н. Бурбаки, Теория множеств, М., 1965. ² Ш. С. Пхакадзе, Тр. Матем. инст. АН ГрузССР, т. 25 (1958). ³ А. Б. Харაзишвили, Сообщ. АН ГрузССР, т. 75, № 2 (1974).