Доклады Академии наук СССР
1975. Том 221, № 3

УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

И. И. БАВРИН

ОБЩИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТЕМЛЯКОВА, ШВАРЦА — ТЕМЛЯКОВА И ПУАССОНА — ТЕМЛЯКОВА С ОПРЕДЕЛЯЮЩИМ n-МЕРНЫМ МНОГООБРАЗИЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ C^n

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 19 XII 1974)

Автором ([1], [2]) в случае ограниченных выпуклых полных n-круговых областей D, $n\geqslant 2$, были решены задачи установления общих интегральных представлений Темлякова, Шварца — Темлякова и Пуассона — Темлякова *. В этих представлениях многообразие, на котором задаются соответствующие плотности, есть либо вся граница области D, либо ее $(2n-1)$-мерная часть. В настоящей статье показано, что существуют общие интегральные представления, природа которых подобна природе общих интегральных представлений Темлякова, Шварца — Темлякова и Пуассона — Темлякова, но в которых роль указанного многообразия играет определяющее n-мерное многообразие.

При изложении придерживаемся определений и обозначений, использованных в ([1], [2], [6], [7]).

1. Определение. n-мерное многообразие

$$\{z=(z_1, \ldots, z_n) : |z_1|=R_1, \ldots, |z_n|=R_n;\ R_1, \ldots, R_n>0\},$$

принадлежащее области $D\in(T)$ или ее границе ∂D, назовем определяющим n-мерным многообразием и обозначим через $E(R_1, \ldots, R_n)$, или кратко $E(R)$.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть $D\in(T)$, функция $f(z)$, $z=(z_1, \ldots, z_n)$, $n\geqslant 2$, голоморфна в D и α — число, равное 0 или 1.*

Тогда, если функции $f_\nu^{(\alpha)}(z)$, $\nu=1, \ldots, n$, и все их частные производные до порядка λ, $0\leqslant\lambda\leqslant n-1-\alpha$, включительно непрерывны на $E(R)$, то для $k=0, 1, \ldots, \lambda$ и $z\in D$

$$f(z)=\alpha f(0)+\frac{1}{n+\alpha(1-n)}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{z_\nu{}^\alpha}{(2\pi)^{2n}i}\int_0^{+\infty}dt_1\ldots$$

$$\ldots\int_0 dt_n\int d\omega_\tau\int \mu\, d\omega_\varphi\int d\omega_\theta\int_{|\zeta|=1} L^{(n-k-1-\alpha)}_{\binom{m_{1+\alpha}}{m_{n-k-1}}}\left[\frac{1}{\zeta-\tilde{u}}\right]\times$$

$$\times L^{(k)}_{\binom{m_{n-k}}{m_{n-1}}}\left[F_{0_\nu}^{(\alpha)}(\zeta, R, \theta)\right]d\zeta, \qquad (1)$$

где $m_{1+\alpha}, m_{2+\alpha}, \ldots, m_{n-1}$, $n\geqslant 3$, — любые, но все различные натуральные числа, взятые из $\{1+\alpha, 2+\alpha, \ldots, n-1\}$ (при $n=2$ и $\alpha=0$ $m_1=1$) **.

---

* Об интегральных представлениях Темлякова см., например, в ([3-5]).

** Все остальные обозначения см., например, в ([7]).

Формулу (1) назовем **общим интегральным представлением Темлякова с определяющим n-мерным многообразием.**

В процессе доказательства теоремы 1 используются формула, приведенная при доказательстве теоремы в [7], формула (2) из [1], записанная в операторной форме, свойства оператора $L^{(n-1-\alpha)}_{\binom{m_{1+\alpha}}{m_{n-1}}}$ и интегральная формула Коши одного комплексного переменного.

Замечание 1. Из формулы (1) видно, что она обладает той же важной особенностью (связью с интегралом Коши), что и общее интегральное представление Темлякова [1].

2. Пусть p, q — натуральные числа с условием $p\geqslant q$, $m_p, m_{p-1}, \ldots$ $\ldots, m_q$, m_0 — любые натуральные числа и

$$f=f(z)=U+iV, \quad z=(z_1, \ldots, z_n), \quad U=\operatorname{Re} f, \quad V=\operatorname{Im} f,$$

f — функция, голоморфная в области $D\in(T)$. Возьмем оператор

$$J^{(p-q+1)}_{\binom{m_q}{m_p}}[U]\equiv J_{m_0}[J_{m_{p-1}}\ldots[J_{m_q}[U]]\ldots],$$

где

$$J_{m_j}[U]=m_jU+\sum_{\nu=1}^{n}\rho_\nu U'_{\rho_\nu}, \quad \rho_\nu=|z_\nu|,$$

$$j=q,\ q+1, \ldots, p,$$

причем

$$J^{(0)}_{\binom{m_p}{m_{p-1}}}[U]\equiv U, \quad p\geqslant 1.$$

Пусть выполняется условие теоремы 1. Полагая $\zeta=e^{i\psi}$, $\tilde{u}=\rho e^{i\Psi}$, можно в формуле (1) перейти от $1/(\zeta-\tilde{u})$ к $(e^{i\psi}+\tilde{u})/(e^{i\psi}-\tilde{u})$ и к $(1-\rho^2)/[1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\Psi)]$. Получаемые при этом формулы будем называть соответственно **общим интегральным представлением Шварца—Темлякова с определяющим n-мерным многообразием и общим интегральным представлением Пуассона—Темлякова с определяющим n-мерным многообразием.** Первое из этих представлений будет иметь вид формулы (1), но в которой в правой части добавлено слагаемое

$$\frac{i}{n+\alpha(1-n)}\sum_{\nu=1}^{n} z_\nu^\alpha \operatorname{Im} f_\nu^{(\alpha)}(0)$$

и вместо интеграла

$$\frac{1}{i}\int\limits_{|\zeta|=1} L^{(n-k-1-\alpha)}_{\binom{m_{1+\alpha}}{m_{n-k-1}}}\left[\frac{1}{\zeta-\tilde{u}}\right] L^{(k)}_{\binom{m_{n-k}}{m_{n-1}}}[F_{0_\nu}^{(\alpha)}(\zeta, R, \theta)]d\zeta \tag{2}$$

стоит интеграл

$$\int\limits_0^{2\pi} L^{(n-k-1-\alpha)}_{\binom{m_{1+\alpha}}{m}}\left[\frac{e^{i\psi}+\tilde{u}}{e^{i\psi}-\tilde{u}}\right] J^{(k)}_{\binom{m_{n-k}}{m_{n-1}}}[\operatorname{Re} F_{0_\nu}^{(\alpha)}(e^{i\psi} R, \theta)]d\psi;$$

второе — также вид формулы (1), но в которой вместо интеграла (2) стоит интеграл

$$\int\limits_0^{2\pi} J^{(n-k-1-\alpha)}_{\binom{m_{1+\alpha}}{m_{n-k-1}}}\left[\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\Psi)}\right] L_{\binom{m_{n-k}}{m_{n-1}}}[F_{0_\nu}^{(\alpha)}(e^{i\psi}, R, \theta)]d\psi.$$

В отношении общего интегрального представления Шварца — Темлякова (Пуассона — Темлякова) с определяющим n-мерным многообразием имеет место замечание, аналогичное замечанию 1.

3. Пусть $E(R^{(\nu)})=E(R_1^{(\nu)},\ldots,R_n^{(\nu)})$, $\nu=1,\ldots,n$, определяющие n-мерные многообразия (в частности, они могут и совпадать). Отметим, что если в теореме 1 заменить $E(R)$ на $E(R^{(\nu)})$, то в формуле (1) и в указанных в п. 2 двух других общих интегральных представлениях μ, $F_{0_\nu}^{(\alpha)}(\zeta, R, \theta)$, $F_{0_\nu}^{(\alpha)}(e^{i\psi}, R, \theta)$ заменяются соответственно на

$$\mu_\nu=\mu_\nu(t,\tau,\varphi,R^{(\nu)})=\exp\sum_{l=1}^{n} t_l\left(\frac{r_l(\tau)}{R_l^{(\nu)}}e^{-i\varphi_l}-1\right),$$

$$F_{0_\nu}^{(\alpha)}(\zeta,R^{(\nu)},\theta)=f_\nu^{(\alpha)}(R_1^{(\nu)}\zeta,R_2^{(\nu)}\zeta e^{i\theta_2},\ldots,R_n^{(\nu)}\zeta e^{i\theta_n}),\quad F_{0_\nu}^{(\alpha)}(e^{i\psi},R^{(\nu)},\theta).$$

Московский областной педагогический институт
им. Н. К. Крупской

Поступило
25 XI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *И. И. Баврин,* ДАН, т. 166, № 3 (1966). [2] *И. И. Баврин,* Ученые записки МОПИ им. Н. К. Крупской, т. 166, 3 (1966). [3] *А. А. Темляков,* Изв. АН СССР, сер. матем., т. 21, 89 (1957). [4] *А. А. Темляков,* ДАН, т. 120, № 5 (1958). [5] *Б. А. Фукс,* Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, М., 1962. [6] *Z. Opial, J. Siciak,* Zesz. nauk. Uniw. Jagiell., № 77, 67 (1963). [7] *И. И. Баврин,* ДАН, т. 219, № 3 (1974).