Доклады Академии наук СССР
1975. Том 221, № 3

УДК 517.947 *МАТЕМАТИКА*

Н. С. БАХВАЛОВ

ОСРЕДНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлено академиком С. М. Никольским 23 XII 1974)

При решении ряда проблем механики и физики ([1-6]) представляет интерес асимптотическое исследование поведения решений уравнений с частными производными или разностями с периодическими, быстро осциллирующими коэффициентами. Настоящая работа является развитием ([5]), где получены первые два члена асимптотического разложения решений таких уравнений. В ряде конкретных случаев первые члены таких разложений получены в ([2-4], [6]).

Рассматривается случай, когда исследуемые величины описываются системами дифференциальных уравнений второго порядка (вообще говоря с комплексными коэффициентами). Область периодичности коэффициентов — куб в пространстве переменных $x_1, \ldots, x_m$ со стороной ε и осями, параллельными координатным.

Рассмотрим уравнение

$$P\mathbf{u}=R\mathbf{u}_{tt}+S\mathbf{u}_t-L\mathbf{u}=\mathbf{f}, \tag{1}$$

$$L=L_2+L_1+L_0, \quad L_2\mathbf{u}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j}\right),$$

$$L_1\mathbf{u}=\frac{\partial}{\partial x_i}(B_i\mathbf{u})+G_i\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}, \quad L_0u=Q\mathbf{u};$$

здесь и далее большими латинскими буквами (кроме P, M, L, C) обозначаются матрицы размерности $n\times n$, элементы которых — функции от переменных $\zeta_i=x_i/\varepsilon$, периодические по каждой из переменных ζ_i с периодом 1; $\mathbf{u}$, $\mathbf{f}$ — векторы-столбцы размерности n; если суммирование по повторяющимся индексам не указано знаком суммирования, то оно производится в пределах $[1, m]$. В приложениях типичен случай разрывных коэффициентов; поэтому равенство (1) понимается как обобщенное в смысле интегрального тождества С. Л. Соболева:

$$\int\cdots\int\left(\left(-R\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}-S\mathbf{u}, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)+\left(A_{ij}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j}+B_i\mathbf{u}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)-\right.$$
$$\left.-\left(G_i\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}+Q\mathbf{u}, \varphi\right)\right)dt\,dx_1\ldots dx_m=0$$

для любого финитного бесконечно дифференцируемого вектора $\boldsymbol{\varphi}$.

Введем обозначения

$$P^0N=\frac{\partial}{\partial\zeta_i}\left(A_{ij}\frac{\partial N}{\partial\zeta_j}\right),$$

$$[A(\zeta_1,\ldots,\zeta_m)]=\int\limits_0^1\ldots\int\limits_0^1 A(\zeta_1,\ldots,\zeta_m)\,d\zeta_1\ldots d\zeta_m,$$

$$\{\mathbf{f}(x_1,\ldots x_m)\}=\frac{1}{\varepsilon^m}\int\limits_{x_1-\varepsilon/2}^{x_1+\varepsilon/2}\ldots\int\limits_{x_m-\varepsilon/2}^{x_m+\varepsilon/2}\mathbf{f}(y_1,\ldots,y_m)\,dy_1\ldots dy_m,$$

$$\mathbf{v}^{(q,i_1,\ldots,i_l)}=\frac{\partial^{q+l}\mathbf{v}}{\partial t^q\,\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_l}}.$$

Далее в ходе построения осредненного уравнения запрещается переставлять местами операторы дифференцирования по различным переменным x_i (соответственно ζ_i). Предлагаемая ниже процедура построения аналогична ранее известным ([7]).

Решение (1) ищем в виде

$$\mathbf{u}=\sum_{p,q,l\geq 0}\varepsilon^{p+q+l}N^p_{qi_1\ldots i_l}\mathbf{v}^{(q,i_1,\ldots,i_l)},\tag{2}$$

где $\mathbf{v}$ будет решением осредненного уравнения. В дальнейшем N_0^0 — единичная матрица, матрицы N, у которых хотя бы один индекс отрицателен,— ненулевые матрицы. Подставим (2) в (1) и приведем подобные члены; получим

$$P\mathbf{u}=\sum_{p,q,l\geq 0}\varepsilon^{p+q+l-2}H^p_{qi_1\ldots i_l}\mathbf{v}^{(q,i_1,\ldots,i_l)}$$

где

$$H_{qi}^p=-P^0N_{qi}^p+T_{qi}^p,$$

$$T^p_{qi_1\ldots i_l}=-\left(A_{i_1j}\frac{\partial N^p_{qi_2\ldots i_l}}{\partial\zeta_j}+\frac{\partial}{\partial\zeta_i}(A_{ii_1}N^p_{qi_2\ldots i_l}+B_iN^{p-1}_{qi_1\ldots i_l})+\right.$$
$$\left.+G_i\frac{\partial N^{p-1}_{qi_1\ldots i_l}}{\partial\zeta_i}+(B_{i_1}+G_{i_1})N^{p-1}_{qi_2\ldots i_l}+A_{i_1i_2}N^p_{qi_3\ldots i_l}+QN^{p-2}_{qi_1\ldots i_l}\right)+$$
$$+RN^p_{q-2,i_1\ldots i_l}+SN^{p-1}_{q-1,i_1\ldots i_l}.\tag{3}$$

Очевидно $H_0^0=0$; потребуем, чтобы каждое из выражений H_{qi}^p было некоторой постоянной матрицей h_{qi}^p, причем коэффициенты при членах порядка ε^{-1} были нулевыми:

$$H_{qi}^p=h_{qi}^p,\quad h_1^0=h_{01}^0=\ldots=h_{0m}^0=h_0^1=0.\tag{4}$$

Уравнение

$$\sum_{p+q+l\geq 2}\varepsilon^{p+q+l-2}h^p_{qi_1\ldots i_l}\mathbf{v}^{(q,i_1,\ldots,i_l)}=\mathbf{f}\tag{5}$$

можно рассматривать как осреднение (1); если $\mathbf{v}$ — решение (5), то $\mathbf{u}$, определяемое по формуле (2), будет решением (1). Решение (5) можно отыскивать в виде формального ряда по степеням ε: $\mathbf{v}=\sum_k\varepsilon^k\mathbf{v}_k(t,x_1,\ldots$ $\ldots,x_m)$. Осредненное уравнение (5) не определяется однозначно: задаваясь произвольными матрицами r_{qi}^p и полагая в (2) и (5)

$$\mathbf{v}=\sum_{p,q,l\geq 0}\varepsilon^{p+q+l}r^p_{qi_1\ldots i_l}\mathbf{w}^{(q,i_1,\ldots,i_l)},$$

получим новое уравнение вида (5) уже относительно $\mathbf{w}$ и представление $\mathbf{u}$ через $\mathbf{w}$ вида (2).

Далее предполагаем выполненными условия: 1) уравнение $P^0N=Z$ разрешимо при $[Z]=0$ и его общее решение записывается в виде $N=N^0+C$, где C — любая постоянная матрица; 2) $\det([R])\neq 0$.

Чтобы уравнение (5) определялось однозначно, зададимся какой-то его канонической формой, например, $h_{q\mathbf{i}}{}^p=0$ при $q\geqslant 2$ за исключением $h_2{}^0$.

Теорема 1. *При этих условиях система* (4) *имеет и притом единственное решение относительно матриц* $N_{q\mathbf{i}}{}^p$ *и* $h_{q\mathbf{i}}{}^p$.

Приведем алгоритм вычисления матриц $N_{q\mathbf{i}}{}^p$ и $h_{q\mathbf{i}}{}^p$. Упорядочим каким-либо образом совокупности $(p, q, \mathbf{i})$, соблюдая лексикографический (алфавитный) порядок относительно совокупности параметров $(p+q+l, p, l)$. Согласно условию 1, уравнение

$$H_{q\mathbf{i}}{}^p=h_{q\mathbf{i}}{}^p, \tag{6}$$

рассматриваемое как уравнение относительно $N_{q\mathbf{i}}{}^p$, разрешимо, если $[T_{q\mathbf{i}}{}^p]=h_{q\mathbf{i}}{}^p$. Последовательно перебираем совокупности $(p, q, \mathbf{i})$ и каждый раз производим следующие операции: из (6) определяем $N_{q\mathbf{i}}{}^p$ с точностью до постоянного слагаемого, из условия разрешимости $[T^p_{q+1,\mathbf{i}}]=h^p_{q+1,\mathbf{i}}$ определяем (однозначно вследствие условия 2)) это слагаемое в матрице $N^p_{q-1,\mathbf{i}}$.

В результате осреднения получится уравнение

$$[R]\mathbf{v}_{tt}+M_1\mathbf{v}_t-M_2\mathbf{v}=\mathbf{f}, \tag{7}$$

где M_1, M_2 — дифференциальные операторы по переменным x_j. Если $\mathbf{v}$ — решение уравнения $-M_2\mathbf{v}=\mathbf{f}$, то оно удовлетворяет (7); поэтому построенное по нему согласно (2) $\mathbf{u}$ удовлетворяет (1); в то же время $\mathbf{u}$ не зависит от t и поэтому $-L\mathbf{u}=f$. Таким образом, уравнение $-M_2\mathbf{v}=\mathbf{f}$ является осреднением уравнения $-L\mathbf{u}=\mathbf{f}$.

Если задаться некоторым s, то после получения всех $h_{q\mathbf{i}}{}^p$ с $p+q+l\leqslant s+1$ будет получено приближение к (5) с точностью до членов порядка $O(\varepsilon^s)$:

$$\sum_{2\leqslant p+q+l\leqslant s+1} \varepsilon^{p+q+l-2} h^p_{qi_1\ldots i_l}\mathbf{v}^{(q,i_1,\ldots,i_l)}=\mathbf{f}. \tag{8}$$

Если $\mathbf{v}$ — решение (8), то

$$\mathbf{u}=\sum_{2\leqslant p+q+l\leqslant s+1} \varepsilon^{p+q+l} N^p_{qi_1\ldots i_l}\mathbf{v}^{(q,i_1,\ldots,i_l)}$$

удовлетворяет (1) с точностью до членов порядка $O(\varepsilon^s)$ (в обобщенном смысле). Последнее утверждение остается в силе, если $\mathbf{v}=\sum\limits_k \varepsilon^k\mathbf{v}_k$, удовлетворяет (5) или (8) с точностью до членов порядка $O(\varepsilon^s)$.

Уравнения типа (8) в случае $m=1$ широко исследуются в литературе по физике твердого тела. Отметим некоторые частные случаи.

1) Если все $B_j=0$ и все $G_j=0$, то $N_{q\mathbf{i}}{}^p$, $h_{q\mathbf{i}}{}^p=0$ при $p+q$ нечетном.

2) В случае уравнения $R\mathbf{u}_{tt}-L_2\mathbf{u}=\mathbf{f}$ оказывается, что все $N_{q\mathbf{i}}{}^p=0$ при $p>0$ и при $p=0$, q нечетном, все $h_{q\mathbf{i}}{}^p=0$ при $p+q>0$, кроме $h_2{}^0=[R]$.

Рассмотрим уравнение $R\mathbf{u}_t-L\mathbf{u}=\mathbf{f}$ в предположении, что условия 1), 2) выполнены. Определим каноническую форму (5) условиями: $h_{q\mathbf{i}}{}^p=0$ при $q>0$, за исключением $h_1{}^0$. Тогда уравнение (5) также определится.

В случае уравнений

$$R\mathbf{u}_{tt}-L_2\mathbf{u}=\mathbf{f}, \tag{9}$$

$$R\mathbf{u}_t-L_2\mathbf{u}=\mathbf{f}$$

с одним и тем же L_2 оператор M_2 в осредненном уравнении оказывается одним и тем же, причем $N_{qi}{}^p=0$ при $p\neq q$, каждая матрица $N_{qi}{}^q$ для второго уравнения совпадает с матрицей $\overset{0}{N}_{2q,\,i}$, соответствующей первому уравнению.

Принятая каноническая форма уравнения (5) «нефизична»: оператор M_2, характеризующий статические свойства в осредненном уравнении, зависит от динамических параметров R и S исходной задачи. Представляет интерес другая каноническая форма: $h_{qi}{}^p=0$ при $q>2$, $[N_{0i}{}^p]=0$ при $p+l>0$.

Теорема 2. *При этих условиях система* (4) *имеет и притом единственное решение относительно матриц* $N_{qi}{}^p$ и $h_{qi}{}^p$.

Здесь осредненное уравнение (5) имеет вид

$$M_0\mathbf{v}_{tt}+M_1\mathbf{v}_t-M_2\mathbf{v}=\mathbf{f},$$

M_k — дифференциальные операторы по переменным x_j, причем M_2 не зависит ни от R, ни от S.

Отметим случай (9), когда все $h_{qi}{}^p=0$ при $p>0$ или $p=0$, $q\neq 0{,}2$. В частности, при $m=1$ оказывается

$$M_2\mathbf{v}=\overset{0}{h}_{011}\mathbf{v}^{(0,1,1)},\quad \overset{0}{h}_{011}=[(A_{11})^{-1}]^{-1}.$$

Покажем, что объявление операторов дифференцирования неперестановочными, иначе отказ от приведения подобных членов в (5), приводит к получению дополнительной информации об исходной задаче. Рассмотрим уравнение

$$L_2\mathbf{u}=\mathbf{f}. \qquad (10)$$

Соответствующее уравнение (5) имеет вид

$$\overset{0}{h}_{0ij}\,\partial^2\mathbf{v}/\partial x_i\,\partial x_j+\ldots=\mathbf{f}.$$

В ряде случаев интересно получение приближений к «напряжениям» $\mathbf{n}_i=A_{ij}\partial\mathbf{u}/\partial x_j$ и «энергии» $e=(\mathbf{n}_i,\ \partial\mathbf{u}/\partial x_i)$. Введем в рассмотрение величины $\bar{\mathbf{n}}_i=\overset{0}{h}_{0ij}\partial\mathbf{v}/\partial x_j$ и $\bar{e}(\bar{\mathbf{n}}_i\partial\mathbf{v}/\partial x_i)$. Если выписываемые нами ряды и ряды, получаемые их дифференцированием, сходятся, можно показать, что $\{\mathbf{n}_i\}\sim\bar{\mathbf{n}}_i$, $\{e\}\sim\bar{e}$. Эти соотношения имеют место и в случае (9). В случае $m=1$ для (9) и (10) справедливо также $\mathbf{n}_i\sim\bar{\mathbf{n}}_i$. Если в (5) привести подобные члены, то вместо $\overset{0}{h}_{0ij}$ будут известны лишь матрицы $\overset{0}{h}_{0ij}+\overset{0}{h}_{0ji}$.

Примечание. В ([5]) ошибочно указано, что для системы уравнений теории упругости $A_{ij}=A_{ji}$, $A_{ij}=A_{ji}^*$. В действительности, в случае неоднородной среды выполнено лишь второе из этих соотношений. Однако можно показать, что все теоремы из ([5]) останутся в силе, если отказаться от условия $A_{ij}=A_{ji}$; при этом в формулировке граничных условий в последней теореме вместо величин $\bar{A}_{ij}$ следует поставить величины $\overset{0}{h}_{0ij}$.

Автор выражает признательность М. Р. Короткиной, побудившей его к написанию настоящей работы.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
13 XII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *М. Борн, Хуан Кунь*, Динамическая теория решеток, ИЛ, 1958. [2] *И. А. Кунин*, ПММ, т. 30, в. 5 (1966). [3] *Э. И. Григолюк, Л. А. Фильштинский*, Перфорированные пластинки и оболочки, «Наука», 1970. [4] *Е. А. Ильюшина*, ПММ, т. 36, № 6 (1972). [5] *Н. С. Бахвалов*, ДАН, т. 218, № 5 (1974). [6] *E. Sanchez-Palencia*, Int. J. Eng. Sci., v. 12, № 4 (1974). [7] *Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский*, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, «Наука», 1963.