Доклады Академии наук СССР
1975. Том 221, № 3

МАТЕМАТИКА

Д. Л. БЕРМАН

РАСХОДЯЩИЕСЯ РАСШИРЕННЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 10 VII 1974)

1°. Введем обозначения: C — множество всех непрерывных в $[-1, 1]$ функций, $\tilde{C}$ — множество всех непрерывных 2π-периодических функций. Пусть задана матрица чисел

$$\begin{matrix} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)},\ x_2^{(2)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{matrix} \tag{m}$$

$-1\leqslant x_n^{(n)}<x_{n-1}^{(n)}<\ldots<x_1^{(n)}\leqslant 1$, $n=1,2,\ldots$ Обозначим через $L_n(f, x)$ интерполяционный многочлен Лагранжа степени $n-1$, построенный для n-й строчки матрицы (m) и для $f\in C$. В конце XIX — начале XX века существовало мнение, что можно систему узлов (m) выбрать таким образом, чтобы для любой $f\in C$ **выполнялось равномерно** в $[-1, 1]$ соотношение $L_n(f, x)\to f(x)$, $n\to\infty$. Однако С. Н. Бернштейн [1] и Г. Фабер [2] независимо друг от друга доказали, что такой матрицы узлов (m) нет. Л. Фейер [3] доказал, что если многочлен $L_n(f, x)$ заменить многочленом $H_n(f, x)$ степени $2n-1$, однозначно определяемым из условий [8, 9]

$$H_n(f, x_k^{(n)})=f(x_k^{(n)}),\quad H_n'(f, x_k^{(n)})=0,\quad k=1,2,\ldots,n,$$

и в качестве n-й строчки матрицы (m) взять корни полинома П. Л. Чебышева $T_n(x)=\cos n\arccos x$, то для любой $f\in C$ выполняется в $[-1, 1]$ равномерно соотношение $H_n(f, x)\to f(x)$, $n\to\infty$.

В [5, 6] изучался процесс $\{H_n(f, x)\}$ для расширенной системы узлов Чебышева

$$\begin{gathered} x_0^{(n+2)}=-1,\quad x_k^{(n+2)}=\cos\frac{2n-2k+1}{2n}\pi,\ k=1,2,\ldots,n, \\ x_{n+1}^{(n+2)}=1,\ n=1,2,\ldots \end{gathered} \tag{1}$$

В [5] доказано, что процесс $\{H_n(f, x)\}$, построенный при узлах (1) для $f(x)=|x|$, расходится при $x=0$. В [6] доказано, что процесс $\{H_n(f, x)\}$, построенный при узлах (1) для $f(x)=x^2$, расходится всюду в $(-1, 1)$. Эти результаты неожиданные, если учесть упомянутый выше результат Фейера [3]. Итак, расширение системы узлов при алгебраической интерполяции может существенно испортить сходимость интерполяционного процесса.

2°. В 2π-периодическом случае чаще всего употребляется тригонометрическое интерполирование с равноотстоящими узлами

$$x_k^{(n)}=\frac{2\pi k}{2n+1},\quad k=1,2,\ldots,(2n+1),\quad n=1,2,\ldots \tag{2}$$

Исходя из конкретных условий задачи иногда расширяют систему узлов (2), добавляя в качестве узлов некоторые фиксированные точки. Возникает вопрос: может ли ухудшиться сходимость тригонометрического интерполяционного процесса при расширении системы узлов (2)? Эта заметка и посвящена этому вопросу. Обозначим через $d_n(f, x)$ тригонометрический полином порядка $2n+1$ с коэффициентом у $\cos(2n+1)x$ равным нулю, который однозначно определяется из условий $d_n(f, x_k^{(n)})=f(x_k^{(n)})$, $d_n'(f, x_k^{(n)})=0$, $k=1, 2, \ldots, (2n+1)$, где $x_k^{(n)}$ определяется согласно (2). А. Х. Турецкий [7] доказал, что для любой $f\in\tilde{C}$ выполняется равномерно на всей оси соотношение

$$d_n(f, x)\to f(x), \quad n\to\infty. \tag{3}$$

Расширим систему узлов (2), добавляя в качестве узла точку $x=\pi$. Рассмотрим тригонометрический полином $\mathscr{E}_n(f, x)$ порядка $2n+2$ с коэффициентом у $\cos(2n+2)x$ равным нулю, который однозначно определяется из условий

$$\mathscr{E}_n(f, x_k^{(n)})=f(x_k^{(n)}), \quad \mathscr{E}_n'(f, x_k^{(n)})=0, \quad k=1, 2, \ldots, (2n+1);$$

$$\mathscr{E}_n(f, \pi)=f(\pi), \quad \mathscr{E}_n'(f, \pi)=0.$$

Процесс $\{\mathscr{E}_n(f, x)\}$ является расширением процесса $\{d_n(f, x)\}$. В силу (3), казалось бы, что для любой $f\in\tilde{C}$ должно равномерно выполняться соотношение $\mathscr{E}_n(f, x)\to f(x)$, $n\to\infty$. Мы докажем, что даже при $f(x)=\sin x$ процесс $\{\mathscr{E}_n(f, x)\}$ расходится во всех точках $(0, 2\pi)$, за исключением лишь двух точек. Это утверждение является следствием теоремы 1.

Теорема 1. *Пусть x не является корнем уравнения*

$$\cos^4 x+4\cos^3 x-2\cos x-1=0. \tag{4}$$

Тогда процесс $\{\mathscr{E}_n(f, x)\}$, построенный для $f(x)=\sin x$, расходится в точке x.

3°. Для доказательства теоремы 1 нам нужны три теоремы, относящиеся к интерполяционному оператору Д. Джексона

$$D_n(f, x)=\sum_{k=1}^{2n+1} f(x_k^{(n)})\left(\frac{\sin(2n+1)\cdot{}^1/_2(x-x_k^{(n)})}{(2n+1)\sin{}^1/_2(x-x_k^{(n)})}\right)^2,$$

построенному для функций $f(x)=\operatorname{tg}{}^1/_2 x$ и $f(x)=\operatorname{tg}^2{}^1/_2 x$. Как известно, Джексон [4] доказал, что для любой $f\in\tilde{C}$ выполняется на всей оси равномерно соотношение

$$D_n(f, x)\to f(x), \quad n\to\infty.$$

Поскольку функции $\operatorname{tg}{}^1/_2 x$ и $\operatorname{tg}^2{}^1/_2 x$ разрывные, то к ним теорема Джексона не применима.

Теорема 2. *Процесс $\{D_n(\operatorname{tg}{}^1/_2 z, x)\}$ сходится в каждой точке $x\neq(2k+1)\pi$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$*

Доказательство этой теоремы следует из тождества

$$D_n(\operatorname{tg}{}^1/_2 z, x)=\frac{2n}{2n+1}\operatorname{tg}{}^1/_2 x-\frac{\sin nx\cos(n+1)x}{(2n+1)\cos^2{}^1/_2 x}.$$

2 Заказ № 1641, т. 221, № 3

Теорема 3. *Имеет место тождество*

$$D_n(\operatorname{tg}^2 {}^1/_2 z, x) = -\frac{4n}{2n+1}\frac{\cos x \cos 2nx}{\sin^4 x} + \frac{4n}{2n+1}\frac{\sin 2nx}{\sin x} +$$
$$+\frac{8}{2n+1}\frac{\sin nx \cos(n+1)x \cos x}{\sin^3 x} + \frac{4n}{2n+1}\frac{\cos(2n-1)x}{\sin^2 x} -$$
$$-\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} - 1 + 6\frac{\sin^2(n+1)x}{\sin^2 x} + \frac{4(n+1)}{2n+1}\frac{\cos 2(n+1)x}{\sin^2 x} -$$
$$-\frac{4}{2n+1}\frac{\sin 2(n+1)x\cos x}{\sin^3 x} + \frac{4(n+1)}{2n+1}\frac{\cos(2n+1)x\cos x}{\sin^2 x}. \quad (5)$$

Доказательство этого тождества связано со сложными вычислениями и потому здесь опускается.

Теорема 4. *Для того чтобы процесс* $\{\mathscr{E}_n(f, x)\}$, *построенный для* $f(x) = \sin x$, *сходился в некоторой точке* $x \neq 0 \pmod{2\pi}$, *необходимо и достаточно, чтобы в этой точке сходился процесс* $\{D_n(\operatorname{tg} {}^1/_2 z, x)\}$.

Доказательство. Согласно формуле А. Х. Турецкого ([7])

$$\mathscr{E}_n(f, x) = \sum_{k=1}^{2n+1} \left(\frac{\omega(x)}{2\omega'(x_k)\sin {}^1/_2 (x - x_k)}\right)^2 \left[1 - \sin(x - x_k)\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}\right] f(x_k) +$$
$$+ \left(\frac{\omega(x)}{2\omega'(\pi)\cos {}^1/_2 x}\right)^2 \left(1 + \sin x \frac{\omega''(\pi)}{\omega'(\pi)}\right) f(\pi),$$

где $\omega(x) = \sin {}^1/_2 (2n+1)x \cos {}^1/_2 x$. Отсюда, после простых вычислений, получим, что

$$\mathscr{E}_n(\sin z,\ x) = 2\cos^2 {}^1/_2 x D_n(\operatorname{tg} {}^1/_2 z,\ x) + 2\cos^2 {}^1/_2 x D_n(\operatorname{tg}^2 {}^1/_2 z \sin(x - z),\ x). \quad (6)$$

Согласно теореме 2

$$2\cos^2 {}^1/_2 x \lim_{n\to\infty} D_n(\operatorname{tg} {}^1/_2 z,\ x) = \sin x. \quad (7)$$

Поэтому из (6) следует, что равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \mathscr{E}_n(\sin z,\ x) = \sin x$ эквивалентно равенству

$$\lim_{n\to\infty} D_n(\operatorname{tg}^2 {}^1/_2 z \sin(x - z), x) = 0. \quad (8)$$

В силу теоремы Джексона, $\lim\limits_{n\to\infty} D_n[\sin(x - z), x] = 0$. Поэтому (8) эквивалентно равенству

$$\lim_{n\to\infty} D_n\left(\frac{\sin(x - z)}{\cos^2 {}^1/_2 z},\ x\right) = 0. \quad (9)$$

После простых преобразований получим, что (9) равносильно равенству

$$\sin x \lim_{n\to\infty} D_n(\operatorname{tg}^2 {}^1/_2 z,\ x) + 2\cos x \lim_{n\to\infty} D_n(\operatorname{tg} {}^1/_2 z,\ x) = \sin x.$$

Согласно теореме 2 $\cos x \lim\limits_{n\to\infty} D_n(\operatorname{tg} {}^1/_2 z,\ x) = \operatorname{tg} {}^1/_2 x \cos x$. Поэтому при $x \neq 0 \pmod{2\pi}$ равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \mathscr{E}_n(\sin z, x) = \sin x$ эквивалентно равенству $\lim\limits_{n\to\infty} D_n(\operatorname{tg}^2 {}^1/_2 z, x) = \operatorname{tg} {}^1/_2 x$.

Теорема 5. *Если* x *не является корнем уравнения* (4), *то процесс* $\{D_n(\operatorname{tg}^2 {}^1/_2 z, x)\}$ *расходится в этой точке.*

Доказательство. Нам нужна лемма, которая по существу содержится в ([6]).

Лемма. *Для любого x можно найти такую последовательность натуральных чисел $n_1<n_2<,\ldots,n_k\to\infty$, $k\to\infty$, что выполняется равенство*

$$\lim_{k\to\infty}\sin n_k x=0. \tag{10}$$

Поэтому можно предполагать, что выполняется (10), а тогда из (5) следует, что

$$\lim_{k\to\infty}D_{n_k}(\operatorname{tg}^2 {}^1/_2 z, x)=2\left(1-\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}+2\operatorname{ctg}^2 x\right), \tag{11}$$

ибо в силу (10)

$$\lim_{k\to\infty}\cos n_k x=1,\quad \lim_{k\to\infty}\cos(2n_k\pm1)x=\cos x,\quad \lim_{k\to\infty}\sin(2n_k\pm1)x=\sin x;$$

$$\lim_{k\to\infty}\sin^2(n_k+1)x=\sin^2 x,\quad \lim_{k\to\infty}\cos 2(n_k+1)x=\cos 2x,$$

$$\lim_{k\to\infty}\sin 2(n_k+1)x=\sin 2x.$$

Стало быть, если правая часть из (11) отлична от $\operatorname{tg}^2 {}^1/_2 x$, то процесс $\{D_n(\operatorname{tg}^2 {}^1/_2 z, x)\}$ расходится в точке x. Для завершения доказательства теоремы 5 остается заметить, что уравнение

$$2\left(1-\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}+2\operatorname{ctg}^2 x\right)=\operatorname{tg}^2 {}^1/_2 x$$

эквивалентно уравнению (4).

Теорема 1 непосредственно следует из теорем 4 и 5.

Теорема 6. *Процесс $\{\mathscr{E}_n(f, x)\}$, построенный для $f(x)=\sin x$, расходится во всех точках интервала $(0, 2\pi)$, за исключением лишь двух точек.*

Действительно, с помощью метода Штурма можно убедиться, что уравнение $z^4+4z^3-2z-1=0$ обладает лишь двумя действительными корнями. Нетрудно видеть, что один из корней z_1 находится в $(-2; -1)$, а другой z_2 в $(0, 1)$. Поскольку $z=\cos x$, то нас интересует лишь z_2. Следовательно, процесс $\{\mathscr{E}_n(\sin z, x)\}$ расходится во всех точках $(0, 2\pi)$, за исключением лишь точек $x=\pm\arccos z_2$.

Ленинградское высшее инженерное
морское училище им. П. С. Макарова

Поступило
10 VII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *С. Н. Бернштейн*, Собр. соч., т. 1, Изд. АН СССР, 1952. [2] *G. Faber*, Jahrsber. d. DMV, B. 23 (1914). [3] *L. Fejér*, Gött. Nachr., v. 66 (1916). [4] *D. Jackson*, Rendiconti del circolo mat. di Palermo, 1914. [5] *Д. Л. Берман*, ДАН, т. 163, № 3 (1965). [6] *Д. Л. Берман*, ДАН, т. 187, № 2 (1969). [7] *А. Х. Турецкий*, Теория интерполирования в задачах, Минск, 1968. [8] *В. И. Смирнов, Н. А. Лебедев*, Конструктивная теория функций комплексного переменного, «Наука», 1964. [9] *И. П. Натансон*, Конструктивная теория функций, М.– Л., 1949.