

О. В. ВОИНОВ, В. В. ВОИНОВ

**ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ
ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНЫМИ
ПОВЕРХНОСТЯМИ**

(Представлено академиком Л. И. Седовым 25 XII 1974)

В отсутствие вихрей в несжимаемой жидкости для каждого момента времени по известным значениям потенциала на свободной поверхности и заданной скорости твердой границы можно определить скорость на свободной поверхности. Если эта задача решена, то, применяя известный способ⁽¹⁾, можно найти движение жидкости во все моменты времени. Рассмотрение интегральных уравнений на границе позволяет сократить число независимых переменных. Основная трудность состоит в том, что задача расчета нормальной скорости на свободной поверхности является некорректной. Ниже сформулированы условия, позволяющие эффективно решать интегральное уравнение I-го рода, если его ядро имеет особенность или разрывно.

Пусть в плоском или осесимметричном случае необходимо найти гармоническую вне поверхности S функцию Φ , если заданы условия

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{S_0} = v_n, \quad \Phi|_{S \setminus S_0} = \Phi_*, \quad \Phi \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty; \quad (1)$$

здесь $S_0 \subset S$ — твердая граница.

Решение задачи для уравнения Лапласа с условиями (1) можно искать при помощи интегрального уравнения

$$2\Phi(Q) = \int_L \left[W \frac{\partial \Phi}{\partial n}(Q') - (\Phi(Q') - \Phi(Q)) \frac{\partial W}{\partial n} \right] x dl; \quad (2)$$

здесь Q' — точка интегрирования, n — внешняя к жидкости нормаль, L — контур цилиндрической поверхности S в плоском случае или контур образующей поверхности вращения S в осесимметричном случае; $Q \in L$. В осесимметричном случае x — расстояние точки Q' от оси симметрии, в плоском случае $x=1$.

В плоском случае функция W выражается через расстояние r между точками Q и Q' :

$$W = -(1/\pi) \ln r. \quad (3)$$

В осесимметричном случае функция W в (2) выражается, кроме r , также через расстояние r_* от точки Q' до точки, симметричной Q относительно оси:

$$W = \frac{2G}{r+r_*}, \quad G = F(1/2, 1/2; 1; z), \quad z = \left(\frac{r-r_*}{r+r_*} \right)^2. \quad (4)$$

Параметр z в (4) тот же, что в (2)*. Из теории эллиптических интегралов следует, что $G(z)$ представима в виде

$$\pi G(z) = G(1-z) [\ln 16 - \ln(1-z)] - H(1-z), \quad (5)$$

где $H(z)$ — функция, аналитическая при $0 \leq z < 1$.

* В формулах (1.4) работы (2) для величин B и z пропущены множители a^2 и a^{-2} соответственно. Последующие формулы записаны верно.

Для корректного вычисления интегралов, содержащих W , недостаточно просто выделять логарифмическую особенность в малой окрестности. На значительной части контура L , сравнимой с его длиной, следует учитывать логарифмический фактор в явном виде ⁽²⁾. Подынтегральная функция представляется в виде произведения $\ln \tau$, $\tau=0$ при $r=0$, на гладкую функцию, которая на малом интервале аппроксимируется параболой. Этому соответствует квадратурная формула

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\tau) \ln \tau d\tau = \left(\frac{\tau_0}{h} D_2 - D_1 \right) \left(\frac{\tau_1 \tau_2}{h} \ln \frac{\tau_2}{\tau_1} - 2\tau_0 \right) + \\ + (f_0 + D_2) (\tau_2 \ln \tau_2 - \tau_1 \ln \tau_1 - 2h) + \frac{1}{3} h D_2, \quad (6)$$

$$D_1 = (f_2 - f_1)/4, \quad D_2 = (f_2 + f_1 - 2f_0)/6, \quad f_i = f(\tau_i);$$

здесь τ_0 — средняя точка отрезка интегрирования $[\tau_1, \tau_2]$, h — шаг интегрирования. Дополнительный член формулы (6) при $h \rightarrow 0$ убывает не медленнее, чем $\frac{1}{18} h^4 f'''$.

Контур L приближенно задается координатами опорных точек Q_i , $i=1, \dots, N$. Принято параметрическое представление. Значениям параметра $\tau=1, \dots, N$ соответствуют точки Q_1, \dots, Q_N . Путем численного дифференцирования по τ при помощи симметричных пятиточечных формул определяются компоненты нормали и производная от длины дуги, необходимая для вычисления интегралов.

Приближенное решение интегрального уравнения (2) находится по методу конечных сумм. Отыскиваются N значений неизвестной функции в опорных точках. В промежутках между опорными точками функция представляется интерполированием. Интегральное уравнение записывается в опорных точках. Получается система N линейных уравнений относительно значений неизвестной функции в опорных точках. Для аппроксимации интегралов используются формула интегрирования (6) и формула Симпсона.

В осесимметричной задаче на контуре вводятся вспомогательные узловые точки. Для опорных точек, расположенных около оси симметрии, масштаб изменения гладких при $z \sim 1$ функций, входящих в выражение W по формулам (4) и (5), по порядку величины равен расстоянию между опорными точками. Поэтому плотность дополнительных точек меняется вдоль контура, причем плотность максимальна для точек, лежащих около оси симметрии, и шаг интегрирования вблизи оси значительно меньше, чем расстояние между соседними опорными точками.

Для эффективного решения интегрального уравнения I-го рода необходимо выполнение следующих условий.

1) Схема интерполирования искомой функции на всем контуре должна быть одной и той же для различных точек Q_i , в которых приближенно записывается уравнение (2).

2) Схема интегрирования (т. е. выбор узловых точек и весов) при аппроксимации (2) системой линейных уравнений с переходом от i -й строки к $(i+1)$ -й не должна сильно изменяться. Допустимо ее изменение на расстоянии одного — двух опорных интервалов от точки Q_i .

Описанный метод позволяет находить решение при любом числе опорных точек N . Погрешность в решении убывает не медленнее N^{-3} с ростом N , если погрешность в значениях $\Phi \sim O(N^{-4})$.

Число операций, необходимых для построения системы линейных уравнений, аппроксимирующей (2), растет как $N^2 \ln N$.

Изложенный метод относится не только к решению уравнения (2), но и непосредственно применим к решению уравнения I-го рода, возникающего при представлении потенциала в виде потенциала простого слоя.

Движение свободной границы определяется из кинематических и динамических условий, справедливых в каждой точке с координатами x_1, x_2 :

$$\frac{dx_1}{dt} = u_n n_1 + u_l n_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = u_n n_2 - u_l n_1, \quad u_n = \frac{\partial \Phi}{\partial n}; \quad (7)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \left(\frac{p}{\rho} + U \right)_{\infty} - \frac{p_0}{\rho} - U + \frac{1}{2} u_n^2 - \frac{1}{2} u_l^2 + u_l \frac{\partial \Phi}{\partial l}; \quad (8)$$

здесь U — потенциал внешних массовых сил, индекс ∞ относится к значению в бесконечно удаленной точке.

Условия (7) и (8), записанные в опорных точках, дают $3N$ уравнений для координат опорных точек и значений потенциала в них. Для каждого

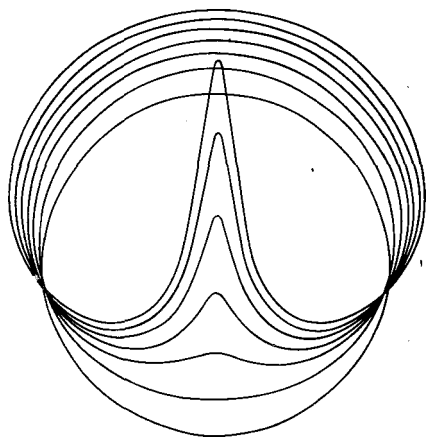


Рис. 1. Движение цилиндрической полости

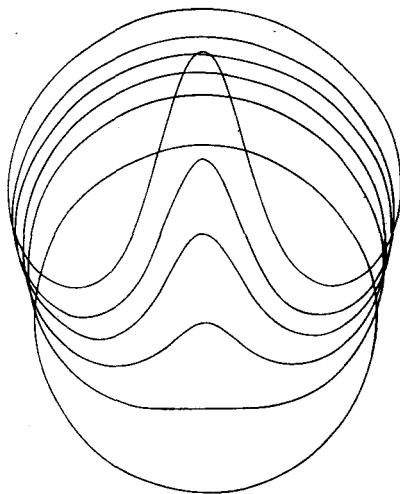


Рис. 2. Всплытие газового пузыря

момента времени нормальная скорость свободной границы u_n определяется описанным выше способом по значениям потенциала Φ на ней. Касательную составляющую скорости точки контура u_l можно выбрать различным образом. Можно, например, принять $u_l = \partial \Phi / \partial l$. В работе u_l выбиралась из условия, чтобы со временем длины дуг между соседними опорными точками на свободной границе изменялись в одинаковое число раз. Интегрирование (7) и (8) по времени производилось по явной схеме с применением формул Адамса третьего порядка.

Согласно описанному методу на ЭВМ БЭСМ-6 проведены расчеты ряда плоских и осесимметричных течений со свободными границами. Приведем некоторые результаты.

Плоская задача. Пусть в начальный момент времени $t=0$ полость в жидкости имеет вид кругового цилиндра единичного радиуса и движется с единичной скоростью. Результаты расчета приведены на рис. 1. Последовательные положения свободной границы изображены для моментов времени $t=0; 0,17; 0,31; 0,43; 0,57; 0,71; 0,86$. Образуется струя, направление которой совпадает с направлением движения полости. Расчет эволюции цилиндрической полости в тяжелой жидкости приводит к результатам, качественно не отличающимся от изображенных на рис. 1.

Осесимметричная задача. При $t=0$ сферический газовый пузырь единичного радиуса покоится в тяжелой жидкости. Масса газа внутри пузыря пренебрежимо мала, объем пузыря принимается постоянным.

Ускорение силы тяжести равно единице. Форма пузыря, найденная в результате расчетов, изображена на рис. 2 для моментов $t=0; 0,6; 0,76; 0,89; 1; 1,18$. Внутри пузыря образуется струя, направленная против ускорения силы тяжести.

Для контроля расчеты одного и того же течения производились с существенно разным числом опорных точек и различным начальным расположением их вдоль границы. Кроме того проверялось выполнение интеграла энергии. В приведенных примерах ошибка в интеграле энергии не превысила $5 \cdot 10^{-4}$.

Поступило
24 IX 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Проблемы гидродинамики и их математические модели, «Наука», 1973. ² В. В. Воинов, О. В. Воинов, А. Г. Петров, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 14, № 3 (1974).