Доклады Академии наук СССР
1975. Том 221, № 3

УДК 517.946.8

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. Н. МАСЛЕННИКОВА, М. Е. БОГОВСКИЙ

СИСТЕМЫ СОБОЛЕВА В СЛУЧАЕ ДВУХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 13 XI 1974)

В работах одного из авторов ([2-4]) проведено исследование асимптотического поведения решения задачи Коши при большом времени для линеаризованных систем гидродинамики вращающейся вязкой жидкости и изучено влияние различных факторов, в частности, размерности пространственных переменных, на асимптотическое поведение решения при $t\to\infty$. Для системы Соболева (без учета вязкости) в трехмерном и одномерном случае было получено асимптотическое разложение решения (см. ([5], [6])), но в случае двух пространственных переменных вопрос до сих пор оставался открытым. Настоящая работа посвящена решению этого вопроса.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему Соболева в случае двух пространственных переменных, т. е. когда все входящие в систему функции не зависят, например, от переменной x_3:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}-[\mathbf{v},\boldsymbol{\omega}]+\operatorname{grad}P=\mathbf{F}(x,t),\qquad \operatorname{div}\mathbf{v}=0, \tag{1}$$

где $\mathbf{v}(x,t)=\mathbf{v}(x_1,x_2,t)$ имеет компоненты (v_1,v_2,v_3), $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ — постоянный вектор угловой скорости, который, не ограничивая общности, можно привести к виду $\boldsymbol{\omega}=(0,\omega,0)$, с $\omega>0$; $[\cdot,\cdot]$ — векторное произведение, $P(x,t)$ — скалярная функция.

Систему (1) решаем в области $E_3{}^T=\{x\in E_2,\ t\geqslant 0\}$ с начальными условиями

$$\mathbf{v}(x,t)\,|_{t=0}=\mathbf{v}^0(x),\qquad \operatorname{div}\mathbf{v}^0=0. \tag{2}$$

Требуется определить, с какой скоростью будет убывать решение задачи Коши для однородной системы (1) $\mathbf{F}(x,t)\equiv 0$ при $t\to\infty$ для случая, когда $\mathbf{v}^0(x)$ убывает при $|x|\to\infty$ достаточно быстро (чтобы можно было пользоваться преобразованием Фурье).

2. Решение задачи Коши. Для простоты изложения пусть $\mathbf{v}^0(x)\in \overset{\circ}{C}{}^\infty(E_2)$. Из дальнейшего будет видно, что достаточно потребовать, чтобы $\mathbf{v}^0(x)$ имел некоторое число производных из $C(E_2)$ и порядок убывания типа полинома. С помощью преобразования Фурье по x мы получаем решение задачи Коши для однородной системы (1) в виде сверток, ядра у которых имеют локально интегрируемые особенности:

$$\mathbf{v}(x,t)=\int_{E_2}\left\{\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial \mathbf{v}^0(x-y)}{\partial x_i}\mathscr{K}_i(y,t)-\operatorname{rot}\mathbf{v}^0(x-y)\mathscr{K}_3(y,t)\right\}dy,$$
$$P(x,t)=\omega\int_{E_2}\{v_2{}^0(x-y)\mathscr{K}_3(y,t)+v_3{}^0(x-y)\mathscr{K}_1(y,t)\}\,dy, \tag{3}$$

где $\mathscr{K}_i$ имеют вид

$$\mathscr{K}_1(x,t)=\frac{x_1}{2\pi r^2}\left[J_0(\omega t)+\frac{\omega t x_2}{r}\int\limits_0^{x_2\omega t/r}\frac{J_1(\Omega)}{\Omega}d\xi\right],$$

$$\mathscr{K}_2(x,t)=\frac{1}{2\pi r}\left[\frac{x_2}{r}J_0(\omega t)-\frac{\omega t x_1^2}{r^2}\int\limits_0^{x_2\omega t/r}\frac{J_1(\Omega)}{\Omega}d\xi\right], \tag{4}$$

$$\mathscr{K}_3(x,t)=\frac{1}{2\pi r}\int\limits_0^{x_2\omega t/r}J_0(\Omega)\,d\xi;$$

здесь

$$\Omega(\xi,\ x,\ \omega t)=[\xi^2+(\omega t x_1/r)^2]^{1/2},$$

J_0, J_1 — функции Бесселя нулевого и первого порядков от указанных аргументов.

3. Асимптотическое поведение решения при $t\to\infty$. Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть начальные данные $\mathbf{v}^0(x)\in\overset{\circ}{C}{}^\infty(E_2)$. Тогда решение задачи Коши для однородной системы* (1) *убывает при $t\to\infty$ как $O(1/\sqrt{\omega t})$, т. е. $\mathbf{v}(x,\ t)=O(1/\sqrt{\omega t})$, $P(x,\ t)=O(1/\sqrt{\omega t})$ на любом компакте $K\subset E_2$; при этом имеет место следующее асимптотическое разложение решения по отрицательным степеням* (ωt):

$$\mathbf{v}(x,t)=\sum_{n=0}^{N}[\mathbf{A}_n(x)J_0(\omega t)+\mathbf{B}_n(x)J_1(\omega t)]\frac{1}{(\omega t)^n}+O\left(\frac{1}{(\omega t)^{N+3/2}}\right), \tag{5}$$

где $\mathbf{A}_n(x)$, $\mathbf{B}_n(x)$ выражаются только через начальные данные.

Аналогичное разложение имеет место и для функции $P(x,\ t)$, как будет видно из доказательства.

Доказательство основано на ряде лемм об убывании сверток, входящих в выражение для решения, при $t\to\infty$.

Лемма 1. *Если $\mathbf{v}^0(x)\in\overset{\circ}{C}{}^\infty(E_2)$, то свертка*

$$\mathbf{Q}_1(x,t)=\frac{\partial\mathbf{v}^0}{\partial x_1}*\mathscr{K}_1$$

при больших $t\geqslant t_0>0$ и при x, принадлежащих компакту K, имеет асимптотическое разложение вида

$$\mathbf{Q}_1(x,t)=\sum_{n=0}(-1)^n\left\{\frac{J_1(\omega t)}{(\omega t)^{2n+1}}\mathbf{a}_{2n+1}^{(1)}(x)+\frac{J_0(\omega t)}{(\omega t)^{2n+2}}\mathbf{b}_{2n+2}^{(1)}(x)\right\}+$$

$$+O\left(\frac{1}{(\omega t)^{2(m+1)+3/2}}\right), \tag{6}$$

где функции $\mathbf{a}_i^{(1)}(x)$, $\mathbf{b}_i^{(1)}(x)$, определяемые начальными данными, ограничены абсолютной постоянной на любом компакте $K\subset E_2$, m — любое натуральное число.

При доказательстве используется идея работы ([5]) одного из авторов, заключающаяся в использовании гладкости начальных данных.

Так как ядро $\mathscr{K}_1(x, t)$ состоит из двух членов, то $\mathbf{Q}_1=\mathbf{Q}_{11}+\mathbf{Q}_{12}$. В выражении

$$\mathbf{Q}_{12}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_0^{\infty}\left[\frac{\partial \mathbf{v}^0(x_1-y_1, x_2-y_2)}{\partial x_1}+\frac{\partial \mathbf{v}^0(x_1-y_1, x_2+y_2)}{\partial x_1}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\frac{y_1y_2}{r^3}\omega t\left(\int_0^{y_2/r}\frac{J_1(\omega t[\xi^2+y_1^2/r^2]^{1/2})}{[\xi^2+y_1^2/r^2]^{1/2}}d\xi\right)dy_2\right\}dy_1$$

сумму в квадратных скобках разлагаем по формуле Тейлора. Выбирая подходящие замены переменных, $\mathbf{Q}_{12}$ приводим к виду

$$\mathbf{Q}_{12}(x, t)=\int_0^{\infty}\left[\omega t\int_0^1 \eta J_1(\eta\omega t)\,\mathbf{\Phi}(x, \rho, \eta)\,d\eta\right]d\rho,$$

где $\Phi(x, \rho, \eta)$ имеет N непрерывных производных по η, причем, что очень существенно, все производные четного порядка по η, где $\eta\in[0, 1]$, у нее равны нулю при $\eta=0$, т. е.

$$\left.\frac{\partial^{2k}\mathbf{\Phi}(x, \rho, \eta)}{\partial \eta^{2k}}\right|_{\eta=0}=0, \qquad k=0, 1, 2, \ldots, [N/2].$$

Установленные свойства функции $\mathbf{\Phi}(x, \rho, \eta)$ позволяют производить интегрирование по частям в интеграле

$$\mathbf{I}(x, \rho, t)=\omega t\int_0^1 \eta J_1(\eta\omega t)\,\mathbf{\Phi}(x, \rho, \eta)\,d\eta$$

(т. е. производить интегрирование по частям без возникновения особенностей), используя известные соотношения для бесселевых функций

$$\frac{d}{d\eta}[J_0(\eta\omega t)]=-\omega t J_1(\eta\omega t), \qquad \frac{d}{d\eta}[\eta J_1(\eta\omega t)]=\omega t\eta J_0(\eta\omega t).$$

Отметим, что первый член асимптотического разложения для $\mathbf{Q}_{12}$ будет равен $-\mathbf{Q}_{11}$, поэтому разложение (6) (если учесть известное асимптотическое разложение для функции Бесселя) начинается с члена порядка $1/(\omega t)^{3/2}$; остальные свертки имеют асимптотическое разложение, начиная с члена, порядок которого $1/\sqrt{\omega t}$; так, для $\mathbf{Q}_2(x, t)$ и $\mathbf{Q}_3(x, t)$ имеют место следующие две леммы.

Лемма 2. *Если* $\mathbf{v}^0(x)\in\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(E_2)$, *то свертка*

$$\mathbf{Q}_2(x, t)=\frac{\partial \mathbf{v}^0}{\partial x_2}*\mathscr{K}_2$$

при $t\geqslant t_0>0$ *для* $x\in K$ *имеет асимптотическое разложение вида*

$$\mathbf{Q}_2(x, t)=J_0(\omega t)\mathbf{b}_0^{(2)}(x)+\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\left\{\mathbf{a}_{2n+1}^{(2)}(x)\frac{J_1(\omega t)}{(\omega t)^{2n+1}}+\right.$$

$$\left.+\mathbf{b}_{2n+2}^{(2)}(x)\frac{J_0(\omega t)}{(\omega t)^{2n+2}}\right\}+O\left(\frac{1}{(\omega t)^{2(m+1)+3/2}}\right), \tag{7}$$

где $\max\{|\mathbf{a}_i^{(2)}(x)|, |\mathbf{b}_i^{(2)}(x)|\}<\mathrm{const}$, m — *любое натуральное число.*

Лемма 3. *Если* $\mathbf{v}^0(x)\in\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(E_2)$, *то свертка*

$$\mathbf{Q}_3(x, t)=\mathrm{rot}\,\mathbf{v}^0*\mathscr{K}_3$$

на любом компакте по x *и при* $t\geqslant t_0>0$ *имеет асимптотическое разложение вида*

$$\mathbf{Q}_3(x, t)=\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\left\{\frac{J_1(\omega t)}{(\omega t)^{2n}}\mathbf{a}_{2n}^{(3)}(x)+\frac{J_0(\omega t)}{(\omega t)^{2n+1}}\mathbf{b}_{2n+1}^{(3)}(x)\right\}+O(1/(\omega t)^{2(m+1)+1/2}), \tag{8}$$

где $\mathbf{a}_i^{(3)}(x)$, $\mathbf{b}_i^{(3)}(x)$ *ограничены на компакте,* m — *любое натуральное число.*

Из лемм 1—3 непосредственно следует теорема 1.

4. Сингулярные фундаментальные решения и оценки в L_p, $p>1$. Таким же путем, как в работе ([5]), получим решение задачи Коши в виде сингулярных интегралов с локально неинтегрируемыми особенностями, которые понимаем в смысле главного значения по Коши.

Это решение имеет вид

$$\mathbf{v}(x, t) = -\mathbf{v}^0(x) J_0(\omega t) - [\mathbf{v}_0, \mathbf{k}] J_1(\omega t) +$$

$$+ \mathrm{V.p.} \int_{E_2} \left\{ \mathbf{v}^0(x-y) \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \mathscr{K}_i(y,t)}{\partial y_i} - [\mathbf{v}^0, \mathrm{grad}_y \mathscr{K}_3] \right\} dy, \tag{9}$$

где $\mathbf{k}=(0, 1, 0)$, свертки по E_2 понимаются в смысле главного значения по Коши, т. е.

$$\mathrm{V.\,p.} \int_{E_2} \mathbf{v}^0(x-y) G(y)\, dy = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{v}^0(x-y) G(y)\, dy,$$

где $\Omega_\varepsilon = E_2 \setminus R_\varepsilon$, где R_ε — круг в плоскости (y_1, y_2) с центром в точке (x_1, x_2) радиуса ε, вектор $\mathrm{grad}_y \mathscr{K}_3$ имеет координаты $(\partial\mathscr{K}_3/\partial y_1, \partial\mathscr{K}_3/\partial y_2, 0)$. Как видно из формул (3), (4), функция $P(x, y)$ выражается через начальные данные (а не через их производные) в виде интегралов, где фундаментальные решения имеют локально интегрируемые особенности. Формулы типа (9) имеют место для grad P:

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = \frac{\omega J_1(\omega t)}{\omega t} v_3{}^0(x) + \omega \mathrm{V.\,p.} \left(v_2{}^0 * \frac{\partial \mathscr{K}_3}{\partial x_1} - v_3{}^0 * \frac{\partial \mathscr{K}_1}{\partial x_1} \right),$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2} = -\omega J_1(\omega t) v_2{}^0(x) + \omega \mathrm{V.\,p.} \left(v_2{}^0 * \frac{\partial \mathscr{K}_3}{\partial x_2} - v_3{}^0 * \frac{\partial \mathscr{K}_1}{\partial x_2} \right). \tag{10}$$

Аналогичным образом выписывается решение задачи Коши неоднородной системы (1) с правой частью (см. ([5])) (используя принцип Дюамеля).

Нетрудно проверить, что все свертки, входящие в (9) и (10), удовлетворяют всем условиям теоремы Зигмунда — Кальдерона об отображениях из L_p в L_p, поэтому имеют место те же оценки, что и в трехмерном случае, т. е. имеет место

Теорема 2. *Если правые части системы* (1) $\mathbf{F}(x,t) \in W^{k,l}_{p,t,x}(E_3{}^T)$, *начальные данные* $\mathbf{v}^0 \in W_p{}^l(E_2)$, *а* $\mathbf{v}(x, t)$, $P(x, t)$ *— решение задачи* (1), (2), *для которого приведенные ниже нормы конечны, то имеют место следующие оценки:*

$$\|\mathbf{v}\|_{W^{k+1,l}_{p,t,x}(E_3{}^T)} + \|\mathrm{grad}\, P\|_{W^{k,l}_{p,t,x}(E_3{}^T)} \leqslant C(p, T) \left(\|\mathbf{v}^0\|_{W^l_p(E_2)} + \|\mathbf{F}\|_{W^{k,l}_{p,t,x}(E_3{}^T)} \right). \tag{11}$$

Замечание. Интересно отметить, что главные члены асимптотического разложения решения по степеням t имеют тот же порядок по t, что и главные значения сингулярных интегралов (см. формулы (9) и (5)—(8)). Этот же эффект был обнаружен и у системы (1) в трехмерном случае ([5]).

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
16 X 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *С. Л. Соболев*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 18, № 1 (1954). [2] *В. Н. Масленникова*, ДАН, т. 212, № 4 (1973). [3] *В. Н. Масленникова*, Математич. сб., т. 92 (134), № 4 (12) (1973). [4] *В. Н. Масленникова*, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 126 (1973). [5] *В. Н. Масленникова*, там же, т. 103 (1968). [6] *В. Н. Масленникова*, Математические вопросы гидродинамики вращающейся жидкости и системы С. Л. Соболева. Докт. дисс., М., 1971.