

М. С. НИКОЛЬСКИЙ

## О КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ УБЕГАНИЯ

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 23 IX 1974)

1. В работах <sup>(1, 2)</sup> и других была рассмотрена линейная задача убегания. Несколько позднее появились работы по квазилинейной задаче убегания (см. <sup>(3, 4)</sup>). В настоящей работе мы рассматриваем квазилинейную задачу убегания и даем достаточные условия для ее решения. Эти условия даются в эффективной форме и эквивалентны условиям убегания Л. С. Понтрягина (см. <sup>(2)</sup>) в линейном случае.

2. Рассматривается следующая дифференциальная игра:

$$\dot{z} = Cz + f(u, v) + a, \quad (1)$$

где  $z \in R^n$ ,  $R^n$  — евклидово пространство,  $C$  — постоянная матрица,  $f(u, v)$  —  $n$ -мерная векторная функция, непрерывная по совокупности переменных  $u, v$ , где  $u \in P$ ,  $P$  — компакт из  $R^p$ ,  $v \in Q$ ,  $Q$  — компакт из  $R^q$ ,  $a$  — постоянный вектор.

Вектор  $u(t)$  находится в распоряжении догоняющего, вектор  $v(t)$  — в распоряжении убегающего. В  $R^n$  выделено линейное подпространство  $M$  размерности  $\leq n-2$ . Движение точки  $z(t)$  происходит под воздействием измеримых  $u(t) \in P$ ,  $v(t) \in Q$ , начинается в момент  $t=0$  из  $z(0) = z_0$  и заканчивается в момент  $t=t_1 \geq 0$ , когда впервые  $z(t_1) \in M$ . Целью догоняющего является приведение вектора  $z(t)$  на  $M$ . Цель убегающего состоит в том, чтобы отдалить окончание игры. Мы будем рассматривать игру с точки зрения убегающего. Предполагается, что убегающий знает уравнение (1) и что в каждый момент  $t \geq 0$  он знает  $z(s)$ ,  $u(s)$ ,  $v(s)$  при  $t-h \leq s \leq t$ , где  $h$  — малая положительная константа. Цель этой работы дать достаточные условия, при которых из любой точки  $z_0 \notin M$  убегающий при любом поведении догоняющего может гарантировать соотношение  $z(t) \notin M$  при всех  $t \geq 0$ .

3. Приведем некоторые утверждения, которыми мы будем в дальнейшем пользоваться. Пусть  $A(r)$  — действительная квадратная матрица порядка  $n$  с элементами, зависящими аналитически от действительного числового параметра  $r$  в некоторой окрестности  $r=0$ .

Утверждение 1. При достаточно малых  $r > 0$  ранг  $A(r)$  постоянен, обозначим его  $\rho$ .

Утверждение 2. Аналитическая матрица  $A(r)$  при  $\rho > 0$  допускает следующую факторизацию, которую мы назовем канонической:

$$A(r) = B(r)C(r), \quad (2)$$

где  $B(r)$ ,  $C(r)$  — аналитические в малой окрестности  $r=0$  матричные функции,  $B(r)$  —  $(\rho \times n)$ -матрица ( $\rho$  столбцов,  $n$  строк),  $C(r)$  —  $(n \times \rho)$ -матрица, причем ранг  $B(r)$  при малых  $r > 0$  и ранг  $C(0)$  равны  $\rho$ .

Замечание 1. Матрицы  $B(r)$ ,  $C(r)$  в (2), очевидно, определяются не единственным образом. Одну из канонических факторизаций можно получить следующим образом. Матрицу  $A(r)$  при малых  $r$  можно представить (см. <sup>(2)</sup>, § 2) в виде следующего произведения трех аналитических в неко-

торой окрестности  $r=0$  квадратных матриц:

$$A(r) = D(r)\mathfrak{A}(r)E(r), \quad (3)$$

где  $\det D(0) \neq 0$ ,  $\det E(0) \neq 0$ , а

$$\mathfrak{A}(r) = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_0(r) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}_0(r) = \begin{pmatrix} r^{k_1} & & & 0 \\ & r^{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & r^{k_p} \end{pmatrix},$$

$k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_p$  — целые неотрицательные числа.

Отметим, что факторизацию типа (3) можно получить весьма просто, используя лишь элементарные операции (см. (2), § 2).

Используя специальное строение матрицы  $\mathfrak{A}(r)$ , нетрудно показать, что  $A(r) = D(r)\mathfrak{A}(r)E(r)$ , где  $\mathfrak{A}(r)$  получается из  $\mathfrak{A}(r)$  отбрасыванием последних  $n-\rho$  столбцов,  $E(r)$  получается из  $E(r)$  отбрасыванием последних  $n-\rho$  строк. Очевидно, полагая  $B(r) = D(r)\mathfrak{A}(r)$ ,  $C(r) = E(r)$ , мы получим каноническую факторизацию.

Определение 1. Пусть ранг  $A(r)$  при малых  $r > 0$  равен  $\rho > 0$ . Будем говорить, что убегающий обладает превосходством над догоняющим при отображении  $A(r)$ , если для некоторой канонической факторизации  $A(r) = \prod_{u \in P} C(0)f(u, Q)$  содержит внутреннюю точку в  $R^\rho$ .

Утверждение 3. Если убегающий обладает превосходством над догоняющим при отображении  $A(r)$ , то для любой канонической факторизации  $A(r) = \prod_{u \in P} C(0)f(u, Q)$  содержит внутреннюю точку в  $R^\rho$ , так что проверка наличия превосходства у убегающего над догоняющим при отображении  $A(r)$  можно провести по одной произвольной канонической факторизации  $A(r)$ .

4. Перейдем к изучению задачи убегания. Не ограничивая общности, будем считать (меняя, если надо  $a$  в (1)), что  $f(u_0, v_0) = 0$  при некоторых  $u_0 \in P$ ,  $v_0 \in Q$ .

Рассмотрим линейную оболочку  $\Lambda$  всевозможных векторов

$$f(u, v), \quad u \in P, \quad v \in Q, \quad \text{в } R^n.$$

Обозначим через  $F$  матрицу оператора ортогонального проектирования из  $R^n$  на  $\Lambda$ . Обозначим через  $L$  ортогональное дополнение  $M$  до  $R^n$ . Пусть  $W$  — пока произвольное двумерное подпространство из  $L$ . Обозначим через  $\pi$  матрицу оператора ортогонального проектирования из  $R^n$  на  $W$ . Рассмотрим аналитическую матрицу  $F(r) = \pi e^{rC}F$ .

Условия убегания. Предполагается, что существует такое подпространство  $W$ , что:

а) в  $W$  не существует такого одномерного подпространства  $W^1$ , что  $F(r)R^n \subset W^1$  при всех малых  $r > 0$ ;

б) убегающий обладает превосходством над догоняющим при отображении  $F(r)$ .

Теорема 1. Если для игры (1) выполнены условия убегания, то при любом  $z_0 \notin M$  убегающий может обеспечить убегание, т. е.  $z(t) \notin M$  при всех  $t \geq 0$ , причем для расстояния точек  $z(t)$  от  $M$  убегающий может обеспечить выполнение оценок (11) — (13) теоремы убегания из (2).

Теорема 2. В линейном случае, т. е. при  $f(u, v) = -u + v$ , где  $u \in P \subset R^n$ ,  $v \in Q \subset R^n$  и  $P, Q$  — выпуклые компакты, сформулированные условия убегания эквивалентны условиям убегания Л. С. Понтрягина (см. (2)).

5. Доказательство теоремы 1 в идейном плане имеет много общего с работой (2) и опирается на результаты работы (2). Управление убегающего строится таким, чтобы можно было преобразовать выражение для  $\dot{L}z(t)$  к виду, к которому уже можно применить фундаментальный результат Л. С. Понтрягина о маневре обхода (см. (2), § 4). Приведем некоторые элементы доказательства теоремы 1.

Из условия а) и двумерности  $W$  следует, что для матрицы  $F(r) = \pi e^{rc} F$  ранг  $\rho$  при малых  $r > 0$  удовлетворяет неравенству  $1 \leq \rho \leq 2$ . Пусть  $F(r) = B(r)C(r)$  — некоторая каноническая факторизация. Тогда в силу условия б) существует такой  $\rho$ -мерный шар  $S(\varepsilon, b)$  малого радиуса  $\varepsilon > 0$  с центром в некоторой точке  $b \in R^p$ , что  $S(\varepsilon, b) \subset \bigcap_{u \in P} C(0)f(u, Q)$ .

Очевидно, при малых  $r \geq 0$   $B(r) = \sum_{i=0}^{\infty} B_i \frac{r^i}{i!}$ , где  $B_i$  — постоянные мат-

рицы порядка  $n$ . Возможны два случая.

1 случай. Существует такое  $k$ , что  $B_0, \dots, B_{k-1}$  — нулевые матрицы, а  $B_k$  имеет ранг 2.

2 случай. Существует такое  $k$ , что  $B_0, \dots, B_{k-1}$  — нулевые матрицы, а  $B_k$  имеет ранг 1.

В случае 1 в качестве убегающего управления  $v(t)$  на малом отрезке  $[0, \theta]$  можно взять  $v(t)$ , которое является решением следующего конечного уравнения:  $C(0)f(u(t), v) = b + w$ , где  $w$  — некоторый фиксированный вектор, причем  $|w| \leq \varepsilon$ . Если векторов  $v$ , удовлетворяющих этому равенству, окажется несколько, то среди них следует выбрать лексикографический минимум, это обеспечит измеримость  $v(t)$ . При таком выборе убегающего управления  $\pi z(t)$  при малых  $t \geq 0$  представляется в виде

$$\pi z(t) = \pi e^{tc} z_0 + \int_0^t \pi e^{(t-s)c} a ds + B_k (w + b) \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} + O(t^{k+2}).$$

Теперь можно использовать маневр обхода Л. С. Понтрягина, подбирая соответствующим образом вектор  $w$ .

Во втором случае можно поступить так. Из условия а) на основании результатов работы (2) следует наличие таких постоянных квадратных невырожденных матриц  $G, H$  порядков  $n, \rho$  соответственно, что  $K(r) = GB(r)H$  при малых  $r > 0$  имеет вид

$$K(r) = \begin{pmatrix} r^k + O(r^{k+1}) \\ r^l + O(r^{l+1}) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ при } \rho = 1,$$

$$K(r) = \begin{pmatrix} r^k + O(r^{k+1}), O(r^{k+1}) \\ r^l + O(r^{l+1}), O(r^l) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ при } \rho = 2,$$

где  $l$  — целое число, большее  $k$ . Отсюда и из формулы Коши следует, что

$$G\pi z(t) = G\pi e^{tc} z_0 + G \int_0^t \pi e^{(t-s)c} a ds + \int_0^t K(t-s) H^{-1} C(0) f(u(s), v(s)) ds + \\ + \int_0^t K(t-s) H^{-1} L(t-s) f(u(s), v(s)) ds,$$

где  $L(r) = C(r) - C(0)$ .

В качестве убегающего управления  $v(t)$  на малом отрезке  $[0, \theta]$  можно взять  $v(t)$ , которое является решением следующего конечного уравнения

$$C(0) f(u(t), v) = b + H\lambda(t), \quad (4)$$

где  $\lambda(t)$  —  $\rho$ -мерная векторная функция, первая компонента которой  $\lambda_1(t) = \beta_0^1 + t\beta_0^2 + \gamma_1(t)$ , а  $\lambda_2(t) \equiv 0$  (при  $\rho = 2$ ), причем  $\beta_0^1, \beta_0^2$  — константы и  $|\beta_0^i| \leq \delta$ ;  $\delta > 0$  выбирается так, чтобы гарантировать неравенство  $|H\gamma(t)| \leq \varepsilon/2$  при малых  $t$ , здесь  $\gamma_1(t) = \beta_0^1 + t\beta_0^2$ , а  $\gamma_2(t) \equiv 0$  (при  $\rho = 2$ ). Скалярная функция  $\chi(t)$  является в паре с функцией  $\chi(t)$  решением системы интег-

ральных уравнений (43), (44) ((<sup>2</sup>), § 3), где следует положить  $a(r)$ ,  $b(r)$  равными соответственно первому и второму элементам первого столбца матрицы  $K(r)$ , а  $A_i \xi$ ,  $B_i \xi$  являются соответственно первой и второй компонентой вектора

$$\int_0^t K(t-s)H^{-1}L(t-s)f(u(s), v(s)) ds.$$

**З а м е ч а н и е 2.** Существенным обстоятельством является то, что для построения  $\chi(t)$ ,  $\hat{\chi}(t)$  достаточно знать  $f(u(s), v(s))$  при  $0 \leq s < t$ . Это следует из результатов ((<sup>2</sup>), § 3).

Если векторов  $v$ , удовлетворяющих (4), несколько, то среди них следует выбрать лексикографический минимум, это обеспечивает измеримость  $v(t)$ . Используя результаты ((<sup>2</sup>), можно утверждать, что при таком выборе  $v(t)$

$$G\pi z(t) = G\pi e^{tc}z_0 + G \int_0^t \pi e^{(t-s)c} a ds + \int_0^t K(t-s)H^{-1}b ds + \omega_t(\beta_0 + \beta_1(t)),$$

где  $|\beta_1(t)| \leq \alpha t$ ,  $\alpha$  — положительная константа, не зависящая от выбора  $u(\cdot)$ ,  $v(\cdot)$ , а  $\omega_t$  — аналитическая при малых  $t$  матрица порядка  $2 \times n$ , причем первые две ее строки образуют невырождающуюся при малых  $t > 0$  матрицу  $\bar{\omega}_t$ , а остальные строки нулевые.

Теперь можно использовать маневр обхода Л. С. Понтрягина, подбирая соответствующим образом вектор  $\beta_0$ .

Получение оценок снизу для расстояния от  $z(t)$  до  $M$  производится как в ((<sup>2</sup>)).

6. В работе ((<sup>4</sup>)) широко используются скользящие режимы для построения управления убегания. Эту технику можно применить и при нашем подходе. Введение скользящих режимов означает, что вместо уравнения (1) рассматривается новое уравнение

$$\dot{z} = Cz + \sum_{i=0}^n \mu_i f(u, v_i) + a, \quad (5)$$

где  $\mu_i \geq 0$  и  $\sum_{i=0}^n \mu_i = 1$ , а управление убегającego  $\tilde{v} = (v_0, v_1, \dots, v_n; \mu_0, \dots, \mu_n)$ , причем  $v_i \in Q$ ,  $i = 0, \dots, n$ . Для новой игры (5) условия убегания, о которых говорилось выше, легко выражаются через исходную игру (1) в следующем виде. Условие а) остается прежним; условие б) заменяется на следующее:  $\bigcap_{u \in P} \text{conv } C(0)f(u, Q)$  содержит внутреннюю точку в  $R^n$ . Эти

новые условия назовем обобщенными условиями убегания.

**Теорема 3.** Если для игры (1) выполнены обобщенные условия убегания, то для игры (5) справедлива теорема 1.

Весьма интересным и пока недостаточно изученным вопросом является вопрос о связи игры (5) с игрой (1). Если  $f(u, v)$  линейна, то при выполнении обобщенных условий убегания можно доказать возможность убегания для игры (1) из всех  $z_0 \notin M$ , причем с сохранением вида оценки снизу расстояния от  $z(t)$  до  $M$ . В нелинейном случае этот вопрос пока мало изучен.

Математический институт им. В. А. Стеклова  
Академии наук СССР  
Москва

Поступило  
12 VIII 1974

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Л. С. Понтрягин, Е. Ф. Мищенко, Дифференциальные уравнения, т. 7, № 3, 436 (1972). <sup>2</sup> Л. С. Понтрягин, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 112, 30 (1971). <sup>3</sup> Е. Ф. Мищенко, Н. Сагитов, Дифференциальные уравнения, т. 9, № 10, 1792 (1973). <sup>4</sup> R. V. Gamkrelidze, G. L. Kharatishvili, SIAM J. Control, v. 12, № 2 (1974).