

Б. А. ПАСЫНКОВ

О РАЗМЕРНОСТИ И ГЕОМЕТРИИ ОТОБРАЖЕНИЙ

(Представлено академиком П. С. Александровым 14 XI 1974)

В заметке прежде всего решается вопрос о представлении k -мерных отображений в виде суперпозиции одномерных отображений. Одновременно для отображений получаются аналоги классических теорем Гуревича (о нульмерных отображениях k -мерных компактов в k -мерный куб I^k) и Нёбелинга — Понтрягина (о вложении k -мерных компактов в куб I^{2k+1}). Во второй части заметки вводятся различные размерностные инварианты отображений ($\dim f$, $\text{Ind } f$, $\text{ind } f$ и др.) и показывается, что для замкнутых отображений нормальных пространств они ведут себя во многом так же, как соответствующие инварианты пространств.

Все рассматриваемые пространства предполагаются хаусдорфовыми и вполне регулярными, все отображения — непрерывными. Для метрического пространства R через $C(X, R)$ обозначается пространство отображений X в R с метрикой равномерной сходимости.

Сначала сформируем для компактов (= метризуемых бикомпактов) два результата, не требующих дополнительных определений.

Теорема 1. Пусть отображение $f: X \rightarrow Y$ компакта X в n -мерный, $n = 0, 1, 2, \dots$, компакт Y имеет размерность

$$\dim f = \sup \{ \dim f^{-1}y : y \in Y \} = k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда:

а) в пространстве $C(X, I^k)$ всюду плотно и имеет тип G_δ множество таких отображений φ , что диагональное произведение ⁽¹⁾

$$f \times \varphi: X \rightarrow Y \times I^k$$

имеет размерность $\dim f \times \varphi \leq 0$;

б) в пространстве $C(X, I^{2k+1+n})$ всюду плотно и имеет тип G_δ множество таких отображений ψ , что диагональное произведение

$$f \times \psi: X \rightarrow Y \times I^{2k+1+n}$$

является вложением (гомеоморфизмом).

Заметим, что упоминаемые выше теоремы Гуревича и Нёбелинга — Понтрягина получаются в случае одноточечного компакта Y . При $k=0$ пункт б) дает теорему Эйленберга из ⁽²⁾.

Вопрос. Можно ли в п. а) теоремы 1 считать Y бесконечномерным (слабо бесконечномерным, счетномерным, слабо счетномерным ⁽¹⁾)?

Будем говорить, что отображение $f: X \rightarrow Y$ вкладывается в отображение $f_0: X_0 \rightarrow Y_0$, если существуют такие вложения $g: X \rightarrow X_0$ и $h: Y \rightarrow Y_0$, что $h \cdot f = f_0 \cdot g$. Если $Y \subseteq Y_0$ и h есть тождественное отображение пространства Y , то будем говорить, что f вкладывается в f_0 канонически.

Если отображение f вкладывается в проектирование $\text{pr}: Z \times Y_0 \rightarrow Y_0$, то будем говорить, что f есть проектирование параллельно Z и писать $f \parallel Z$.

Из п. б) теоремы 1 следует, таким образом, что k -мерное отображение компакта в n -мерный компакт есть проектирование параллельно I^{2k+1+n} .

Из п. а) теоремы 1 вытекает (если к множеству $(f \times \varphi)X$ применить проектирование $\text{pr}: Y \times I^k \rightarrow Y$)

Теорема 2. Для отображения $f: X \rightarrow Y$ компакта X в конечномерный компакт Y следующие утверждения равносильны:

- 1) $\dim f \leq k$;
- 2) f представляется в виде суперпозиции $f = h \cdot g$ нульмерного отображения g и проектирования h параллельно I^k ;
- 3) f представляется в виде суперпозиции $f = h_k \cdot \dots \cdot h_1 \cdot g$ нульмерного отображения g и k проектирований $h_i, i=1, \dots, k$, параллельно отрезку;
- 4) (при $k > 0$) f представляется в виде суперпозиции $f = h_k \cdot \dots \cdot h_2 \cdot h_1'$ одномерного отображения h_1' и $k-1$ проектирований $h_i, i=2, \dots, k$, параллельно отрезку.

Так как суперпозиция нульмерных отображений компактов нульмерна, то мы получаем с точки зрения теории размерности не улучшаемое (и имеющее, как мне кажется, принципиальное значение).

Следствие 1. Любое k -мерное отображение конечномерных компактов представимо в виде суперпозиции k одномерных отображений, $k \geq 1$.

Среди одномерных отображений простейшими, очевидно, являются проектирования параллельно отрезку. Поэтому с точки зрения геометрии в теореме 3 получен существенно более сильный результат, чем в следствии 1.

В дальнейшем нам потребуется определение размерности $\dim f$ отображения f , несколько отличное от общепринятого, но совпадающее с ним в случае бикомпактов.

Для отображения $f: X \rightarrow Y$ через $\beta^+ f$ обозначим однозначно определенное (и непрерывное) продолжение отображения f в отображение βX на $\beta(fX)$.

Определение 1. Для отображения $f: X \rightarrow Y$ считаем

$$\dim f = \sup \{ \dim (\beta^+ f)^{-1} y : y \in \beta(fX) \}. \quad (*)$$

Замечание 1. а) Для бикомпактного X , очевидно,

$$\dim f = \sup \{ \dim f^{-1} y : y \in Y \}. \quad (**)$$

б) Если отображение f замкнуто, пространство X нормально, а fX есть F -пространство ⁽³⁾ (например, fX может быть паракомпактным или слабо паракомпактным пространством) и $\dim fX < \infty$, то имеет место равенство $(**)$ (см. ⁽³⁾).

Определение 2. Для отображения $f: X \rightarrow Y$ нормального пространства X считаем: тогда и только тогда $\text{Ind } f = -1$, когда $X = \Lambda$; тогда и только тогда $\text{Ind } f = 0$, когда $\dim f = 0$; если класс отображений, для которых $\text{Ind } f \leq k$ уже определен, то полагаем $\text{Ind } f \leq k+1$ в случае, когда для любой дизъюнктивной пары замкнутых в X множеств F_1 и F_2 между ними в X существует такая перегородка Φ , что $\text{Ind } f|_{\Phi} \leq k$. Считаем $\text{Ind } f = \min \{ k : \text{Ind } f \leq k \}$. Если соотношение $\text{Ind } f \leq k$ не выполняется ни для какого $k=0, 1, 2, \dots$, то полагаем $\text{Ind } f = \infty$ *.

Определение 3. Для отображения $f: X \rightarrow Y$ считаем

$$\text{ind } f = -1 \Leftrightarrow X = \Lambda;$$

если класс отображений с $\text{ind } f \leq k$ уже определен, то полагаем $\text{ind } f \leq k+1$ в случае, когда для любой точки $x \in X$ и любого замкнутого в X множества $F \ni x$ найдется такая окрестность O_y точки $y = fx$, что в $f^{-1}O_y$ между точкой x и множеством $F \cap f^{-1}O_y$ существует перегородка Φ , для которой $\text{ind } f|_{\Phi} \leq k$. Считаем $\text{ind } f = \min \{ k : \text{ind } f \leq k \}$.

Заметим, что отображения, удовлетворяющие соотношению $\text{ind } f \leq 0$, совпадают с разбивающими в смысле Зарелуа ⁽⁴⁾ отображениями.

* Можно было бы по индукции определить и трансфинитные значения $\text{Ind } f$.

Определение 4. Для отображения $f: X \rightarrow Y$, $X \neq \Lambda$, считаем $\dim_0 f \leq k$, $k=0, 1, 2, \dots$, если $X = \bigcup_{i=1}^{k+1} X_i$, $\dim f|_{X_i} \leq 0$, $i=1, \dots, k+1$.

Определение 5. Для отображения $f: X \rightarrow Y$, $X \neq \Lambda$, считаем $\delta f \leq k$, если существуют такие отображения $g: X^0 \rightarrow Y$ и $h: X^0 \xrightarrow{\text{на}} X$, что $\text{ind } g \leq 0$, $g=f \cdot h$, а отображение h замкнуто и имеет кратность $\leq k+1$ *

Определение 6. Базой отображения $f: X \rightarrow Y$ будем называть такую систему \mathfrak{B} открытых в X множеств, что для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности Ox найдется такое множество $V \in \mathfrak{B}$ и такая окрестность Ofx , что $V \cap f^{-1}Ofx \subseteq Ox$, т. е. объединение системы \mathfrak{B} с системой прообразов всех открытых в Y множеств является предбазой в X .

Под весом $w(f)$ (соответственно функциональным весом $W(f)$) отображения f будем понимать минимум мощностей баз отображения f (соответственно баз отображения f , состоящих из функционально открытых множеств).

Очевидно, тогда и только тогда $W(f) \leq \tau$, когда f есть проектирование параллельно тихоновскому кубу I^τ .

Любое отображение пространств со счетной базой (в частности, компактов) имеет счетный функциональный вес. Следующее утверждение дает уже нетривиальный пример отображений счетного функционального веса (и обобщает теорему Урысона о вложении компактов в гильбертов кирпич I^∞).

Теорема 3. Любое совершенное отображение $f: R \rightarrow S$ метризуемых пространств R и S является проектированием параллельно I^∞ .

Для размерности отображений счетного функционального веса имеют место аналоги утверждений, касающихся размерности пространств со счетной базой.

Теорема 4. Пусть дано отображение $f: X \rightarrow Y$, $\dim Y = n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $W(f) = \aleph_0$. Если $\dim f = k$, $k=0, 1, 2, \dots$, то:

а) в пространстве $C(X, I^k)$ всюду плотно (а в случае бикомпактности пространства X имеет также тип G_δ) множество таких отображений φ , что диагональное произведение $f \times \varphi: X \rightarrow Y \times I^k$ имеет размерность $\text{ind}(f \times \varphi) \leq 0$; более того, существуют такие бикомпактные расширения bX , bY и такие продолжения b_f и b_φ отображений f и φ на bX и bY , что $W(b_f \times b_\varphi) = \aleph_0$ и $\dim(b_f \times b_\varphi) \leq 0$.

б) в $C(X, I^{2k+1+n})$ всюду плотно (а в случае бикомпактности пространства X имеет также тип G_δ) множество таких отображений ψ , что диагональное произведение $f \times \psi$ есть вложение.

Следствие 2. В условиях теоремы 4 отображение f представляется в виде суперпозиции $f = h_k \cdot \dots \cdot h_1 \cdot g$ отображения g размерности $\text{ind } g \leq 0$ и веса $W(g) \leq \aleph_0$ и k проектирований h_i , $i=1, \dots, k$, параллельно отрезку.

Следствие 3. Если в условиях теоремы 4 отображение f совершенно, пространство X нормально, а Y есть F -пространство (например, паракомпакт), $\dim Y < \infty$, то для отображения f следующие условия эквивалентны:

- 1) $\dim f \leq k$;
- 2) $\text{Ind } f \leq k$;
- 3) $\text{ind } f \leq k$;
- 4) $\delta(f) \leq k$;
- 5) $f = h_k \cdot \dots \cdot h_1 \cdot g$,

где $\dim g \leq 0$, $W(g) \leq \aleph_0$, а h_i есть проектирования параллельно отрезку, $i=1, \dots, k$;

- 6) $f = g_k \cdot \dots \cdot g_1$, где $\dim g_i \leq 1$, $W(g_i) \leq \aleph_0$, $i=1, \dots, k$.

Следствие 4. Пусть дано совершенное отображение $f: R \rightarrow S$ метрических пространств R и S и $\dim S < \infty$.

а) Тогда для f имеет место эквивалентность утверждений (1)–(6) следствия 3 и утверждения (7) $\dim_0 f \leq k$.

* В связи с этим определением см. теорему 12 из (3).

б) Если $\dim f = k$, то имеет место утверждение (б) теоремы 4.

Следствие 5. Для отображений конечномерных компактов имеют место утверждения следствия 4.

В связи с инвариантом $\text{Dim } f$ Ю. М. Смирнова ⁽⁶⁾ приведем еще

Следствие 6. Для замкнутого отображения $f: R \rightarrow S$ метрического пространства R на конечномерное метризуемое пространство S следующие утверждения эквивалентны:

а) $\dim f \leq k$,

б) $\text{Dim } f \leq k$ для некоторой метрики в S ,

в) $f = h \cdot g$, где $g: R \rightarrow S \times I^k$ — равномерно нульмерное относительно метрики на R и некоторой метрики на $S \times I^k$ отображение, а h есть проектирование $S \times I^k$ на S .

В случае отображений несчетного функционального веса аналог следствия 1, по-видимому, не имеет места, однако выполняется

Теорема 5. Пусть отображение $f: X \rightarrow Y$ бикompактов X и Y имеет размерность $\dim f \leq k$ и $\dim Y < \infty$.

Тогда для любого конечного открытого покрытия ω бикompакта X в $C(X, I^k)$ всюду плотно множество таких отображений φ , что диагональное произведение $f \times \varphi$ есть $(0, \omega)$ -отображение ⁽⁷⁾.

Следствие 7. В условиях теоремы 5 $f = p \cdot g \cdot h$, где h есть ω -отображение, отображение g кусочно топологично (т. е. hX представляется в виде конечной суммы замкнутых множеств, на каждом из которых отображение g топологично) и $p \parallel I^k$.

Теорема 5 сводит доказательство формулы Гуревича $\dim X \leq \dim Y + \dim f$ к формуле $\dim Y \times I \leq \dim Y + 1$. Аналог теоремы 5 можно доказать и для отображений любых пространств.

Отметим некоторые свойства введенных размерностных инвариантов отображений. Пусть дано отображение $f: X \rightarrow Y$. Тогда:

1) для любого $A \subseteq X$ имеем $\text{ind } f|_A \leq \text{ind } f$;

2) $\text{ind } f \leq \delta f$;

3) $\dim f = \dim \beta^+ f$.

Если пространство X нормально, а отображение f замкнуто, то:

4) $\text{Ind } f = \text{Ind } \beta^+ f$;

5) $\dim f \leq \text{Ind } f$;

6) $\text{ind } f \leq \text{Ind } f$;

7) для любого замкнутого в X множества F имеем неравенства $\dim f|_F \leq \dim f$, $\text{Ind } f|_F \leq \text{Ind } f$;

8) если X есть конечная (соответственно счетная) сумма своих замкнутых подмножеств X_i (и Y есть конечномерное F -пространство), то $\dim f = \sup \dim f|_{X_i}$.

Для отображений имеет место аналог теоремы о бикompактном расширении данного веса и размерности.

Теорема 6. Для отображения $f: X \rightarrow Y$ веса $W(f) \geq \aleph_0$ и размерности $\dim f \leq k$ существуют такие бикompактные расширения bX и bY и такое продолжение $bf: bX \rightarrow bY$ отображения f , что

$$w(bX) = wX, \dim bX = \dim X, W(bf) = W(f), \dim bf \leq k.$$

Теорема 6 является следствием факторизационной теоремы для размерности \dim отображений.

Московский физико-технический институт
Долгопрудный Московской обл.

Поступило
30 X 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ П. С. Александров, Б. А. Пасынков, Введение в теорию размерности, М., 1973.
² S. Eilenberg, Fund. Math., v. 24, 156 (1935). ³ Б. А. Пасынков, ДАН, т. 202, № 6, 1274 (1972). ⁴ А. В. Зарелуа, ДАН, т. 144, № 4, 713 (1962). ⁵ В. И. Пономарев, Матем. сб., т. 60, № 1, 89 (1963). ⁶ М. Л. Шершнева, Матем. сб., т. 60, № 2, 207 (1963).
⁷ Б. А. Пасынков, Сиб. Матем. журн., т. 5, № 2, 356 (1964).