Доклады Академии наук СССР
1975. Том 221, № 3

УДК 513.88:517.948 *МАТЕМАТИКА*

О. Б. СИДОНСКИЙ

# О ДВОЙСТВЕННЫХ ОПЕРАТОРАХ НА ГРУППЕ

*(Представлено академиком С. Л. Соболевым 23 XII 1974)*

Рассматриваются дуальные операторы на матричной группе, образующие одновременно пару функциональных соотношений с дифференциальным и разностным оператором соответственно. Первый из этих операторов принадлежит классу операторов математической физики, а второй представляет собой разностный аналог оператора того же класса. Синтез двойственных операторов основан на представлениях группы матриц, ядро которых является разностным аналогом фундаментального решения.

1. Рассмотрим представление группы $G$ вещественных матриц

$$g\equiv g(p,q,s,\tau,\varphi)=\begin{pmatrix} e^\tau\cos\varphi & -e^\tau\sin\varphi & 0 & p\\ e^\tau\sin\varphi & e^\tau\cos\varphi & 0 & q\\ 0 & 0 & e^\tau & s\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad g\in G, \tag{1}$$

вида

$$T(g)f(z,\theta)=e^{-z(s+p\cos\theta+q\sin\theta)}f(e^\tau z,\theta-\varphi) \tag{2}$$

в пространстве бесконечно дифференцируемых финитных функций двух переменных. Сопоставим каждой функции $f(z,\theta)$, финитной в окрестности точки $z=0$, повторное интегральное преобразование ($\mu$ целое)

$$F(\lambda,\mu)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty z^{-\lambda-1}\,dz\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\mu\theta}f(z,\theta)\,d\theta \tag{3}$$

и рассмотрим представление второй реализации $Q(g)$

$$Q(g)F(\lambda,\mu)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty z^{-\lambda-1}\,dz\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\mu\theta}T(g)f(z,\theta)\,d\theta.$$

Формула обращения преобразования (3) имеет вид

$$f(z,\theta)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{\hat\mu=-\infty}^{\infty}e^{i\hat\mu\theta}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}z^{\hat\lambda}F(\hat\lambda,\hat\mu)\,d\hat\lambda.$$

Применяя эту формулу, запишем представление $Q(g)$ на абелевой подгруппе $\hat G\subset G$

$$\hat g(p,q,s)=g(p,q,s,0,0),\quad \hat g\in\hat G,$$

в форме интегрального оператора

$$Q(\hat g)F(\lambda,\mu)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\mathbf{K}(\lambda-\hat\lambda,\mu-\hat\mu,\hat g)F(\hat\lambda,\hat\mu)\,d\hat\lambda, \tag{4}$$

$$s>\sqrt{p^2+q^2},\qquad \operatorname{Re}\lambda<c,$$

с ядром $\mathbf{K}(\lambda,\mu,\hat g)$,

$$\mathbf{K}(\lambda,\mu,\hat g)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty z^{-\lambda-1}\,dz\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\mu\theta-z(s+p\cos\theta+q\sin\theta)}\,d\theta, \tag{5}$$

$$s>\sqrt{p^2+q^2}>0,\qquad \operatorname{Re}\lambda<0.$$

Изменение порядка интегрирования и суммирования в (4) допустимо в силу абсолютной сходимости суммы и интеграла.

Выполняя интегрирование в (5) по $z$, получим

$$\mathbf{K}(\lambda, \mu, \hat{g}) = \frac{\Gamma(-\lambda)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (s+p\cos\theta+q\sin\theta)^{\lambda} e^{-i\mu\theta}\, d\theta, \quad \operatorname{Re}\lambda<0, \tag{6}$$

где $\Gamma(-\lambda)$ — гамма-функция Эйлера.

2. Рассмотрим инфинитезимальные операторы представлений. Нетрудно показать, что на однопараметрических подгруппах группы $G$ инфинитезимальные операторы представления $T(g)$ имеют вид

$$A_p = \frac{\partial}{\partial p}\bigg|_{g=e} T(g) = -z\cos\theta, \quad A_q = -z\sin\theta, \quad A_s = -z, \quad A_\tau = z\frac{\partial}{\partial z},$$

где $e$ — единичный элемент группы $G$.

Инфинитезимальные операторы представления второй реализации $Q(g)$ могут быть записаны в форме

$$\begin{gathered}\hat{A}_p = \frac{\partial}{\partial p}\bigg|_{g=e} Q(g) = -\frac{1}{2} E_\lambda^{-1}(E_\mu + E_\mu^{-1}),\\ \hat{A}_q = -\frac{1}{2i} E_\lambda^{-1}(E_\mu - E_\mu^{-1}), \quad \hat{A}_s = -E_\lambda^{-1} \quad \hat{A}_\tau = \lambda,\end{gathered} \tag{7}$$

где $E$ — оператор сдвига.

Инфинитезимальные операторы представления $T(g)$ на абелевой подгруппе $\hat{G}$ связаны между собой равенством

$$A_p^2 + A_q^2 = A_s^2, \tag{8}$$

и, следовательно, аналогичная связь имеет место для инфинитезимальных операторов второй реализации

$$\hat{A}_p^2 + \hat{A}_q^2 = \hat{A}_s^2. \tag{9}$$

Так как инфинитезимальные операторы являются операторами дифференцирования по параметрам соответствующих однопараметрических подгрупп

$$A_p = \partial/\partial p, \; A_q = \partial/\partial q, \; A_s = \partial/\partial s,$$

то соотношение (8) влечет равенство

$$\square(\hat{g})\, T(g) = (\partial^2/\partial p^2 + \partial^2/\partial q^2 - \partial^2/\partial s^2)\, T(g) = \mathbf{O},$$

где $\mathbf{O}$ — аннулирующий оператор.

Идентичное равенство с волновым оператором $\square$ влечет соотношение (9) для представления второй реализации $Q(g)$

$$\square(\hat{g})\, Q(g) = \mathbf{O}.$$

Следствием последнего равенства для ядра $\mathbf{K}(\lambda, \mu, \hat{g})$ представления $Q(\hat{g})$ (4)—(6) является уравнение в частных производных

$$\square(\hat{g})\, \mathbf{K}(\lambda, \mu, \hat{g}) = 0. \tag{10}$$

3. Рассмотрим сумму инфинитезимальных операторов вида

$$S = sA_s + pA_p + qA_q,$$

естественно связанную с представлением $T(g)$ на абелевой подгруппе $\hat{G}$ равенством $T(\hat{g}) = \exp S$. Нетрудно проверить, что для суммы $S$ и представления $T(g)$ имеет место соотношение

$$ST(g)=[A_\tau, T(g)], \qquad (11)$$

где $[A, T]$ — коммутатор операторов $A$ и $T$.

Перейдем к представлению второй реализации $Q(g)$. Сумма инфинитезимальных операторов $\hat{S}$,

$$\hat{S}=s\hat{A}_s+p\hat{A}_p+q\hat{A}_q,$$

связанная с представлением $Q(\hat{g})$ равенством $Q(\hat{g})=\exp\hat{S}$, представляет собой в соответствии с (7) сумму операторов сдвига

$$\hat{S}=-E_\lambda^{-1}\left[sI+\frac{p}{2}(E_\mu+E_\mu^{-1})+\frac{q}{2i}(E_\mu-E_\mu^{-1})\right], \qquad (12)$$

где $I$ — единичный оператор.

Выражение (11) влечет соответствующее соотношение для представления второй реализации

$$\hat{S}Q(g)=[\hat{A}_\tau, Q(g)].$$

На абелевой подгруппе $\hat{G}$ последнее выражение может быть записано в форме

$$\hat{S}Q(\hat{g})=\lambda Q(\hat{g})-Q(\hat{g})\lambda,$$

так как $\hat{A}_\tau=\lambda$ (7). Отсюда для ядра представления $\mathbf{K}(\lambda, \mu, \hat{g})$ нетрудно получить уравнение с оператором $\hat{S}$ (12) вида

$$\hat{S}\mathbf{K}(\lambda, \mu, \hat{g})=\lambda\mathbf{K}(\lambda, \mu, \hat{g}). \qquad (13)$$

4. Введем функцию $\Gamma(\lambda, \mu, \hat{g})$ на подгруппе $\hat{G}$, связанную с ядром $\mathbf{K}(\lambda, \mu, \hat{g})$ (6) равенством

$$\mathbf{K}(\lambda, \mu, \hat{g})=\Gamma(-\lambda)\Gamma(\lambda, \mu, \hat{g}). \qquad (14)$$

Уравнение (13) приводит к соотношению для функции $\Gamma(\lambda, \mu, \hat{g})$ вида

$$\hat{S}\Gamma(\lambda, \mu, \hat{g})=-\Gamma(\lambda, \mu, \hat{g}), \qquad (15)$$

причем в силу интегрального представления (6) имеет место равенство ($\mu$ целое)

$$\Gamma(0, \mu, \hat{g})=\begin{cases}1, & \mu=0,\\ 0, & \mu^2>0.\end{cases} \qquad (16)$$

В свою очередь, уравнение (10) для ядра $\mathbf{K}(\lambda, \mu, \hat{g})$ влечет уравнение с волновым оператором $\Box$ для функции $\Gamma(\lambda, \mu, \hat{g})$

$$\Box(\hat{g})\Gamma(\lambda, \mu, \hat{g})=0. \qquad (17)$$

Равенства (15), (16) означают, что функция $\Gamma(\lambda, \mu, \hat{g})$ представляет собой разностный аналог фундаментального решения оператора $(\hat{S}+I)$. Следовательно, функция $u(\lambda, \mu, \hat{g})$ ($\lambda$ целое)

$$u(\lambda, \mu, \hat{g})=\sum_{\hat{\mu}=-\infty}^{\infty}\Gamma(\lambda, \mu-\hat{\mu}, \hat{g})\varphi(\hat{\mu}),$$

где $\varphi(\hat{\mu})\in m$ принадлежит пространству ограниченных последовательностей $m$, удовлетворяет соотношению с оператором $\hat{S}$ (12)

$$(\hat{S}+I)u(\lambda, \mu, \hat{g})=0, \quad u(0, \mu, \hat{g})=\varphi(\mu). \qquad (18)$$

С другой стороны, в соответствии с (17) функция $u(\lambda, \mu, \hat{g})$ удовлетворяет соотношению с волновым оператором $\Box$

$$\Box(\hat{g})u(\lambda, \mu, \hat{g})=0. \qquad (19)$$

Введем функцию $\widehat{u(\lambda, \mu, g)}$, отличающуюся от $u(\lambda, \mu, \hat{g})$ показательным множителем $\gamma(\lambda, \mu, \hat{g})$, $p$, $q>0$,

$$\gamma(\lambda, \mu, \hat{g}) = (s+\sqrt{p^2+q^2})^{-\lambda}\left(\frac{p-iq}{p+iq}\right)^{\mu/2} = (s+\sqrt{p^2+q^2})^{-\lambda}e^{i\mu \operatorname{arctg} q/p}, \qquad (20)$$

вида

$$\hat{u}(\lambda, \mu, \hat{g}) = \gamma(\lambda, \mu, \hat{g})\, u(\lambda, \mu, \hat{g}).$$

Для этой функции $\hat{u}(\lambda, \mu, \hat{g})$ равенство (18) влечет соотношение с разностным оператором $R$

$$R(\hat{g})\hat{u}(\lambda, \mu, \hat{g}) = 0, \qquad (21)$$

$$R = \Delta_\lambda - r\Delta_\mu\nabla_\mu, \quad r = {}^1/_2(s+\sqrt{p^2+q^2})^{-1}\sqrt{p^2+q^2},$$

а операторы $\Delta$ и $\nabla$, образующие разности вперед и назад, имеют вид $\Delta = E - I$, $\nabla = I - E^{-1}$.

Отметим, что разностный оператор $R$ представляет собой разностный аналог дифференциального оператора $L$

$$L = \partial/\partial t - r\, \partial^2/\partial x^2.$$

Таким образом, на группе $G$ (1) волновой оператор $\square$ и разностный оператор $R$ являются двойственными операторами. Отметим, что разностный аналог фундаментального решения оператора $R$ связан с функциями Лежандра ([2–5]).

Существование двойственных операторов впервые отмечено С. Л. Соболевым при решении задачи о многократном отражении волны от твердой стенки (личное сообщение). Знание этого факта стимулировало настоящее исследование.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и механики
при Томском государственном университете
им. В. В. Куйбышева

Поступило
13 XII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Н. Я. Виленкин*, Специальные функции и теория представлений групп, «Наука», 1965. [2] *О. Б. Сидонский*, Труды III Казахстанской конф. по математике и механике, Алма-Ата, 1970, стр. 170. [3] *А. Б. Сидонский*, Труды НИИ ПММ, т. 1, Томск, 1972. [4] *О. Б. Сидонский*, ДАН, т. 205, № 4, 791 (1972). [5] *О. Б. Сидонский*, ДАН, т. 216, № 5, 990 (1974).