Доклады Академии наук СССР
1975. Том 221, № 3

УДК 517.944

МАТЕМАТИКА

Р. А. ЭЙЮБОВ

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 23 XII 1974)

В настоящей работе строится асимптотика по малому параметру решения следующей задачи.

Ищется принадлежащее пространству $W_2^{(2m)}(R_+)$ решение уравнения

$$\mathscr{L}_\varepsilon u \equiv \mathscr{L}_1 u + \varepsilon \mathscr{L}_2 u = f(t, \mathbf{x}), \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $R_+ = \{(t, x),\ t \geqslant 0,\ -\infty < \mathbf{x} < +\infty\}$ — полупространства, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

$$\mathscr{L}_1 \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathscr{L}_0, \quad \mathscr{L}_0 \equiv \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha D^\alpha, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \ldots D_n^{\alpha_n},$$

$$\mathscr{L}_2 \equiv \sum_{|\beta| \leqslant 2m} b_\beta D^\beta, \quad \beta = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n), \quad |\beta| = \beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_n,$$

$$D^\beta = D_0^{\beta_0} D_1^{\beta_1} \ldots D_n^{\beta_n}, \quad D_0 = -i \frac{\partial}{\partial t}, \quad D_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j},$$

$f(t, \mathbf{x})$ — заданная финитная функция.

Предполагается, что $\mathscr{L}_\varepsilon$ и $\mathscr{L}_2$ суть эллиптические, а $\mathscr{L}_1$ — параболический операторы с постоянными коэффициентами.

Расщепление (1) назовем *первым расщеплением* оператора $\mathscr{L}_\varepsilon$.

Прежде чем начать построение асимптотики поставленной задачи, напишем второе расщепление оператора $\mathscr{L}_\varepsilon$, для чего вблизи границы $t=0$ вводим локальные координаты

$$t = \varepsilon^{1/(2m-1)} \tau, \quad x_i = x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

В новых координатах оператор $\mathscr{L}_\varepsilon$ имеет следующий вид:

$$\mathscr{L}_{\varepsilon,0} \equiv \varepsilon^{-1/(2m-1)} \left\{ \left(\frac{\partial^{2m}}{\partial \tau^{2m}} + \frac{\partial}{\partial \tau} \right) + \sum_k \varepsilon^{k/(2m-1)} M_k \right\}, \tag{3}$$

где M_k — линейные дифференциальные выражения.

Асимптотическое представление решения поставленной задачи ищем в виде

$$u = \sum_{i=0}^{n(2m-1)} \varepsilon^{i/(2m-1)} w_i + \sum_{j=0}^{n(2m-1)} \varepsilon^{(1+j)/(2m-1)} v_j + \varepsilon^n z, \tag{4}$$

где функции w_i определяются первым итерационным процессом, v_j — функции типа пограничного слоя вблизи границы $t=0$ и определяются вторым итерационным процессом.

Расщеплению (1) оператора $\mathscr{L}_\varepsilon$ соответствует итерационный процесс, если приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде

$$w=w_0+\varepsilon^{1/(2m-1)}w_1+\ldots \tag{5}$$

Подставляя выражение для w из (5) в (1) и сравнивая члены при одинаковых степенях ε, имеем

$$\mathscr{L}_1 w_0 \equiv \partial w_0/\partial t+\mathscr{L}_0 w_0=f, \tag{6}$$

$$\mathscr{L}_1 w_k=0, \quad k=1,\ 2,\ldots,\ 2m-2, \tag{7}$$

$$\mathscr{L}_1 w_r=-\mathscr{L}_2 w_{r-2m+2}, \quad r=2m-1,\ 2m,\ldots \tag{8}$$

Таким образом, мы нашли, что функции w_k являются решениями параболических уравнений. Начальные условия, при которых будут решены эти уравнения, будут сформулированы чуть ниже.

Второму расщеплению оператора $\mathscr{L}_\varepsilon$ соответствует итерационный процесс, если приближенное решение уравнения $\mathscr{L}_{\varepsilon,0}\, v=0$ будем искать в виде

$$v=\varepsilon^{1/(2m-1)}(v_0+\varepsilon^{1/(2m-1)}v_1+\ldots). \tag{9}$$

Подставив это выражение для v в уравнение и сравнивая члены при одинаковых степенях ε, получим

$$\frac{\partial^{2m} v_0}{\partial \tau^{2m}}+\frac{\partial v_0}{\partial \tau}=0; \tag{10}$$

$$\frac{\partial^{2m} v_k}{\partial \tau^{2m}}+\frac{\partial v_k}{\partial \tau}=-\sum_{s=1}^{k} M_s v_{k-s}, \quad k=1,2,\ldots \tag{11}$$

Полученная рекуррентная система уравнений показывает, что члены разложения (9) являются решениями типа пограничного слоя обыкновенных дифференциальных уравнений (10), (11).

Описанные выше итерационные процессы связаны между собой граничными условиями (2). Для выявления этих связей потребуем, чтобы сумма $w+v$ удовлетворяла всем граничным условиям (2).

Подставив выражение для суммы $w+v$ в (2) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим

$$w_0\big|_{t=0}=0; \tag{12}$$

$$w_k\big|_{t=0}=-v_{k-1}\big|_{\tau=0}, \quad k=1,\ 2,\ldots; \tag{13}$$

$$\frac{\partial^r v_s}{\partial \tau^r}\bigg|_{\tau=0}=-\frac{\partial^r w_{s-r+1}}{\partial t^r}\bigg|_{t=0}, \quad s=0,1,\ldots;\quad r=1,2,\ldots,m-1. \tag{14}$$

Таким образом, мы нашли условия, при которых будем решать уравнения, полученные итерационными процессами.

Определим, например, функцию w_0. Она будет решением задачи

$$\mathscr{L}_1 w_0\equiv\frac{\partial w_0}{\partial t}+\mathscr{L}_0 w_0=f(t,\mathbf{x}); \tag{15}$$

$$w_0\big|_{t=0}=0. \tag{16}$$

Очевидно, при условии положительной определенности оператора $\mathscr{L}_0$ и финитности функции $f(t,\ \mathbf{x})$ последняя задача имеет достаточно гладкое решение.

Имеет место следующая

Теорема 1. *Если $\mathscr{L}_0$ — положительно определенный оператор и $f(t, x)$ — финитная функция, то решение уравнения* (15), (16) *принадлежит пространству* $W_2^{(2m)}(R_+)$.

Зная функцию w_0, определяем функцию v_0.

Функция v_0 является решением типа пограничного слоя задачи

$$(-1)^m \frac{\partial^{2m} v_0}{\partial \tau^{2m}} + \frac{\partial v_0}{\partial \tau} = 0; \tag{17}$$

$$\left.\frac{\partial v_0}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = -\left.\frac{\partial w_0}{\partial t}\right|_{t=0}, \quad \left.\frac{\partial^k v_0}{\partial \tau^k}\right|_{\tau=0} = 0, \quad k=2, 3, \ldots, m-1. \tag{18}$$

Очевидно, (17) — обыкновенное уравнение. Для его решения напишем характеристическое уравнение. Оно имеет вид

$$(-1)^m \lambda^{2m} + \lambda = 0. \tag{19}$$

Можно легко показать, что $m-1$ корней уравнения (19) строго лежат в левой полуплоскости (обозначим их через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$). Этот факт обеспечивает регулярность вырождения поставленной задачи.

Решение типа пограничного слоя задачи (17), (18) имеет вид

$$v_0 = \sum_{k=1}^{m-1} c_k e^{\lambda_k \tau},$$

где $\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0$ и c_k суть постоянные, которые определяются условиями (18).

Аналогично продолжая процесс, определяем все функции, входящие в разложения (5) и (9).

Следовательно, мы определили все члены разложения (4). Теперь оценим остаточный член. Для этого выражение (4) напишем так:

$$\varepsilon^n z = u - \sum_{i=0}^{n(2m-1)} \varepsilon^{i/(2m-1)} w_i - \sum_{j=0}^{n(2m-1)} \varepsilon^{(1+j)/2m} v_j. \tag{20}$$

Действуя на обе части равенства (20) соответствующими расщеплениями оператора $\mathscr{L}_\varepsilon$ и учитывая уравнения, полученные из итерационных процессов, находим, что функция z является решением, принадлежащим пространству $W_2^{(2m)}(R_+)$, задачи

$$\mathscr{L}_\varepsilon z = F; \tag{21}$$

$$\left.\frac{\partial^k z}{\partial t^k}\right|_{t=0} = 0, \quad k=0, 1, \ldots, m-1, \tag{22}$$

где F — известная функция.

Имеет место следующая

Теорема 2. *Для решения задачи* (21), (22) *справедлива оценка*

$$\|z_1\| \leqslant c \|F\|_2, \tag{23}$$

где $\|\cdot\|_1$ — *норма в пространстве* $W_2^{(m)}(R_+)$, $\|\cdot\|_2$ — *норма в пространстве* $L_2(R_+)$, *а* $c > 0$ — *постоянная, не зависящая от* ε.

Для доказательства теоремы обе части уравнения (21) надо умножить на z и полученные выражения интегрировать по частям с учетом граничных условий (22).

Подытоживая изложенное, можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 3. *Если $f(t, x)$ — финитная функция, $\mathscr{L}_0$ и $\mathscr{L}_2$ — положительно определенные эллиптические операторы, то для решения задачи*

(1), (2) *имеет место асимптотическое представление* (4), *причем функции* w_i *определяются первым итерационным процессом,* v_i *суть функции типа пограничного слоя вблизи границы* $t=0$, *определяемые вторым итерационным процессом, а* $\varepsilon^n z$ — *остаточный член, причем* z *ограничена в метрике пространства* $W_2^{(m)}(R_+)$.

Выражаю искреннюю благодарность М. Г. Джавадову за постановку задачи и обсуждение результатов.

Азербайджанский государственный педагогический
институт им. В. И. Ленина
Баку

Поступило
3 XII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. И. Вишик, Л. А. Люстерник,* УМН, т. 15, в. 93 (1960). [2] *М. Г. Джавадов,* ДАН, т. 144, № 2 (1962). [3] *М. Г. Джавадов,* Изв. АН АзербССР, № 3 (1962). [4] *Р. С. Эфендиев,* ДАН, т. 198, № 1 (1971). [5] *М. Г. Джавадов, Р. А. Эйюбов,* ДАН, т. 215, № 6 (1974).