

Л. Г. БАБАТ

ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ НА N -МЕРНОМ ЕДИНИЧНОМ КУБЕ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 27 V 1974)

Пусть на n -мерном евклидовом пространстве E^n задан функционал

$$h = \sum_1^n c_i x_i,$$

где $c_1, \dots, c_n > 0$. Пусть a и b — вершины n -мерного единичного куба Q^n .

Мы говорим, что $h(a)$ и $h(b)$ ε -близки ($\varepsilon > 0$), если

$$\max(h(a), h(b)) / \min(h(a), h(b)) \leq 1 + \varepsilon.$$

Спрашивается, на какое минимальное число групп можно разбить значения h на вершинах Q^n , если значения, входящие в одну группу, ε -близки между собой.

Имеет место

Теорема 1. При любом $\varepsilon > 0$ значения h на ненулевых вершинах Q^n можно так разбить на группы, состоящие из ε -близких значений, что число этих групп не превзойдет $n(1 + 1/\log_2(1 + \varepsilon))$.

Можно поставить вопрос о вычислении максимального и минимального значений h в каждой из построенных групп. Будем считать элементарными операциями сравнение отношения двух чисел с третьим и выбор максимума из двух чисел. Используя теорему 1, можно получить следующие утверждения

Теорема 2. Пусть $v = 2n(n+1)(1 + 1/\log_2(1 + \varepsilon))$.

Тогда, вычислив значение h не более чем в $v/2 + n$ вершинах куба Q^n , можно не более чем за $2(v+n)$ элементарных операций для каждой из упомянутых в теореме 1 групп значений найти минимальное и максимальное значение h и вершины, где эти значения достигаются.

Рассмотрим обычную задачу о ранце: найти минимум

$$h = \sum_1^n c_i x_i, \quad c_1, \dots, c_n > 0, \quad (1)$$

при условии

$$g = \sum_1^n a_i x_i \geq b_0 \quad (2)$$

и x_1, \dots, x_n , равных или 0 или 1. Точку $d_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ будем называть ε -приближенным решением задачи (1), (2), $\varepsilon > 0$, если для любой точки $d_1 = (x_1^1, \dots, x_n^1)$, удовлетворяющей (2), имеет место соотношение $h(d_0)/h(d_1) \leq 1 + \varepsilon$ (см. (1)). Используя теорему 1, можно также получить следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $v = n(n+1)(1 + (n-1)/\log_2(1 + \varepsilon))$.

Тогда, вычислив значения h и g не более, чем на $v/2 + n$ вершинах Q^n можно не более чем за $4(v+n)$ элементарных операций найти ε -приближенное решение задачи (1), (2).

Задача о ранце может быть несколько изменена и превращена в задачу с фиксированными доплатами и одним ограничением: найти минимум

$$h' = \sum_1^n (d_i x_i + c_i \operatorname{sgn} x_i), \quad (3)$$

$$d_1, \dots, d_n \geq 0, \quad c_1, \dots, c_n > 0$$

при условиях

$$g' = \sum_1^n (q_i x_i + a_i \operatorname{sgn} x_i); \quad (4)$$

$$0 \leq x_i \leq 1, \quad i=1, \dots, n. \quad (5)$$

Теорема 3 перейдет при этом в следующую теорему.

Теорема 4. Пусть

$$v = \left(2 + \frac{n \log_2(1 + \max_i d_i)}{\log_2(1 + \varepsilon)} \right) \left(1 + \frac{n \log_2 \left(\sum_1^n (d_i + c_i) \right)}{\log_2(1 + \varepsilon)} \right).$$

Тогда, вычислив значение h' и g' не более чем в v точках упорядочив не более n массивов, содержащих не более чем v/n чисел каждый, можно, сделав не более $2v + v/n$ элементарных операций, найти ε -приближенное решение задачи (3), (4), (5).

В заключение считаю своим долгом выразить благодарность Ю. Ю. Финкельштейну за постановку задач, советы и помощь.

Всесоюзный государственный
проектно-технологический институт
Центрального статистического управления СССР
Москва

Поступило
27 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ю. Ю. Финкельштейн, ε -подход для приближенного решения задач целочисленного линейного программирования. Тез. докл. на II Международн. конфер. по математическому программированию в Матрафюрде, Венгрия, 1974. ² А. А. Корбут, Ю. Ю. Финкельштейн, Дискретное программирование, М., «Наука», 1969. ³ В. П. Гришутин, Математические методы решения экономических задач, № 3, 1972, стр. 93. ⁴ Р. Ледли, Программирование и использование цифровых вычислительных машин, «Наука», 1966.