

А. Л. БРАХМАН

О ПРИСОЕДИНЕНИИ КРАЯ К РЕГУЛЯРНОМУ НАКРЫТИЮ ЗАМКНУТОГО МНОГООБРАЗИЯ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 18 X 1974)

1. Основная теорема. Рассмотрим регулярное накрытие M замкнутого многообразия M^n . На нем действует группа $\pi_1(M)/\pi_1(\hat{M})$. Спрашивается, когда $\hat{M}$ диффеоморфно внутренности компактного многообразия с краем (= к $\hat{M}$ можно присоединить край)?

Далее полагаем, что $\hat{M}$ некомпактно, $n \geq 6$.

Прежде всего M должно иметь гомотопический тип конечного клеточного комплекса (= быть гомотопическим конечным). При некоторых ограничениях на группу $\pi_1(M)/\pi_1(\hat{M})$ это условие становится достаточным.

Теорема 1. Если группа $\pi_1(M)/\pi_1(\hat{M})$ имеет один конец и односвязна, $\hat{M}$ гомотопически конечно, то M диффеоморфно внутренности компактного многообразия с краем.

Примеры односвязных групп с одним концом: 1) прямое произведение любых трех конечно представимых бесконечных групп, 2) группа, действующая на R^n , $n \geq 3$, без неподвижных точек и с компактным фактор-пространством.

Доказательство теоремы 1 опирается на решение общей задачи о присоединении края к открытому многообразию, впервые поставленной Браудером. Эта задача была им решена для односвязных на бесконечности многообразий ⁽²⁾. Как показано автором, из результатов Браудера следует вариант теоремы 1 для универсального накрытия ⁽¹⁾.

Начиная с 1965 г., появился ряд работ, в которых рассматривались неодносвязные на бесконечности открытые многообразия.

В доказательстве топологической инвариантности рациональных классов Понтрягина, данном П. С. Новиковым ⁽⁷⁾, для гомотопически конечного регулярного накрытия $\hat{M}$ замкнутого многообразия M с действием группы $Z \cong \pi_1(M)/\pi_1(\hat{M})$ определен элемент из $\tilde{K}^0(Z\pi_1(\hat{M}))$. Он является препятствием к присоединению края к $\hat{M}$, возникающим за счет второго конца односвязной группы Z . В. Л. Голо построил примеры реализации этого препятствия ⁽³⁾.

Одновременно появился цикл работ Зибенмана, связанных с общей задачей о присоединении края к открытому многообразию ⁽⁴⁻⁶⁾. Однако в известных автору работах замкнутая система алгебраических препятствий в общем случае не построена: определено лишь препятствие типа $\tilde{K}^0$, известное еще из работы Уолла ⁽⁸⁾. Недостающее препятствие Зибенман заменяет различными геометрическими условиями, эффективными только в случае задачи о представлении многообразия в виде произведения некоторого многообразия на полупрямую ⁽⁵⁾. Поэтому нами кратко описана общая задача о присоединении края к открытому многообразию, хотя автор не уверен в новизне тех или иных вспомогательных результатов.

2. Инварианты бесконечных комплексов. В этом пункте вводятся инварианты, необходимые для решения задачи о присоединении края.

Пусть $\{\dots C_i \xrightarrow{d_i} C_{i-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_0\} = C$ — комплекс проективных модулей над ассоциативным кольцом A с единицей. Спрашивается, когда он гомотопически эквивалентен комплексу конечномерных свободных модулей? Если кольцо A нётерово, то ответ хорошо известен: A -модули $H_i(C)$ должны быть конечно-порождены. Однако этот частный случай не охватывает большинства топологических примеров, поскольку групповые кольца конечно представимых групп как правило не нётеровы.

Введем отношение эквивалентности A -модулей. Если существует точная последовательность $A^n \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow 0$, то модули M_1 и M_2 называются непосредственно эквивалентными. Профакторизуем полугруппу всех A -модулей $\text{Mod}(A)$ по наименьшему отношению эквивалентности, включающему непосредственную эквивалентность. Полученную полугруппу обозначим $B(A)$.

Легко проверить, что конечно-порожденные модули и только они представляют нулевой элемент в $B(A)$.

Предположим, что существует комплекс C' с конечным $(n-1)$ -мерным остовом C'^{n-1} , гомотопически эквивалентный C , $C' \simeq C$.

Определение. $W_n(C) \in B(A)$ — элемент, представляемый модулем $C_n' / d_{n+1}'(C'_{n+1})$.

$W_n(C)$ не зависит от выбора $C' \simeq C$ и определено тогда и только тогда, когда $W_{<n}(C) = 0$.

Пусть $W_n(C) \neq 0$. Тогда $W(C) = W_n(C)$, $n(C) = n$ — гомотопические инварианты C . Если $W_n(C) = 0$ при любом n , то полагаем $W(C) = 0$, $n(C) = \infty$.

Предложение 1. Следующие утверждения эквивалентны:

1) Комплекс C гомотопически эквивалентен комплексу свободных конечномерных модулей.

2) $W(C) = 0$.

Если кольцо A нётерово, то модуль гомологий $H_n(C)$ представляет элемент $W_n(C) \in B(A)$. Условие 2) предложения 1 сводится тогда к условию конечной порожденности модулей гомологий $H_n(C)$ при всех n . Таким образом, предложение 1 обобщает отмеченную выше теорему на случай произвольного ассоциативного кольца с единицей. Подчеркнем, что в общем случае нётерова кольца A модуль $H_n(C)$ не представляет элемента $W_n(C)$.

Если сильная гомологическая размерность $(^s) D(C) < \infty$, $W(C) = 0$, то C гомотопически эквивалентно конечному комплексу проективных модулей C' . Для него, как известно, определена эйлерова характеристика

$$\chi(C') = \sum_i (-1)^i \langle C_i' \rangle \in K^0(A),$$

являющаяся препятствием к существованию конечного комплекса свободных модулей $C'' \simeq C$ $(^s)$. $\chi(C')$ — гомотопический инвариант C' . Поэтому $\chi(C')$ не зависит от выбора $C' \simeq C$ и, следовательно, определено $\chi(C) = \chi(C')$.

Пусть X — клеточный комплекс, $C(\tilde{X})$ — комплекс цепей его универсального накрытия, рассматриваемый над кольцом $\mathbb{Z}\pi_1(X) = \Lambda(X)$.

Предложение 2. Следующие утверждения эквивалентны:

1) $C(\tilde{X})$ гомотопически эквивалентно конечному комплексу свободных $\Lambda(X)$ -модулей, $\pi^1(X)$ конечно представимо.

2) X гомотопически эквивалентно конечному клеточному комплексу.

Таким образом, полные наборы препятствий к гомотопической конечности клеточного комплекса и комплекса цепей его универсального накрытия по существу совпадают.

Предложение 3. Если $C(\tilde{X}) \simeq C'$, где C' — комплекс свободных $\Lambda(X)$ -модулей, то найдется такой комплекс $X' \simeq X$, что $C'/C'^3 \cong C(\tilde{X})/C^3(\tilde{X}')$.

3. Задача Браудера. Вернемся к общей задаче о присоединении края к открытому многообразию M .

Фундаментальные группы концов M ($\pi_1^\infty(M, i)$) должны быть стабильны на бесконечности и конечно представимы — это необходимое условие существования края ⁽⁵⁾.

Если $\bar{X}$ — универсальное накрытие конечного комплекса X , то стабильность фундаментальных групп концов $\bar{X}$ и сами эти группы полностью определяются группой $\pi_1(\bar{X})$ ⁽⁴⁾. Поэтому можно ввести понятие стабильной группы и фундаментальной группы i -го конца $\pi_1^\infty(G, i)$ стабильной группы G (предполагается, что группа G конечно представима). В частности, односвязной называется стабильная группа с тривиальными фундаментальными группами концов.

Пусть $\Gamma_M = \{M_\alpha\}$, где $M_\alpha = \bar{M} \setminus V_\alpha$, V_α — компактное подмногообразие M . Вложения $M_\alpha \subset \text{int } M_\beta$ превращают Γ_M в направленное множество. При помощи гладкой триангуляции $M_\alpha \in \Gamma_M$ можно корректно определить

$$\begin{aligned} n(M_\alpha) &= n(C(\bar{M}_\alpha)) \in \mathbb{Z} \cup \infty, \\ W_n(M_\alpha) &= W_n(C(\bar{M}_\alpha)) \in B(\Lambda(M_\alpha)), \\ \chi(M_\alpha) &= \chi(C(\bar{M}_\alpha)) \in \tilde{K}^0(\Lambda(M_\alpha)). \end{aligned}$$

Легко проверить, что для $i: M_\alpha \subset \text{int } M_\beta \in \Gamma_M$ справедливы равенства

$$i_* W_n(M_\alpha) = W_n(M_\beta), \quad i_* \chi(M_\alpha) = \chi(M_\beta),$$

если определены левые части ($i_*: \Lambda(M_\alpha) \rightarrow \Lambda(M_\beta)$ индуцирует гомоморфизмы $B(\Lambda(M_\alpha)) \rightarrow B(\Lambda(M_\beta))$, $\tilde{K}^0(\Lambda(M_\alpha)) \rightarrow \tilde{K}^0(\Lambda(M_\beta))$), $n(M_\alpha) \leq n(M_\beta)$.

Таким образом, определены

$$\begin{aligned} n &= n^\infty(M) = \lim_{\Gamma_M} n(M_\alpha), \\ Z(M) &= \{W_n(M_\alpha)\} \in \varprojlim_{\Gamma_M} B(\Lambda(M_\alpha)). \end{aligned}$$

Если $Z(M) = 0$, то определены $\chi(M_\alpha)$ и $Z_\chi(M) = \{\chi(M_\alpha)\} \in \varprojlim_{\Gamma_M} \tilde{K}^0(\Lambda(M_\alpha))$. Последний инвариант определен в ⁽⁶⁾.

Теорема 2. Открытое многообразие M^n , $n \geq 6$, диффеоморфно внутренности компактного многообразия с краем тогда и только тогда, когда концы M имеют стабильные конечно представимые фундаментальные группы, их число конечно,

$$Z(M) = 0, \quad Z_\chi(M) = 0$$

($Z_\chi(M)$ — инвариант типа $\tilde{K}^0$, известный из работы Уолла ⁽⁸⁾, инвариант $Z(M)$, несмотря на его естественность, в данной задаче ранее не рассматривался).

Основной этап вывода теоремы 1 из теоремы 2 содержится в следующей лемме.

Основная лемма. Если выполнены условия теоремы 1, то естественные проекции

$$\begin{aligned} \lim_{\leftarrow \Gamma_M} B(\Lambda(\hat{M}_\alpha)) &\rightarrow B(\Lambda(\hat{M})), \\ \lim_{\leftarrow \Gamma_M} \tilde{K}^0(\Lambda(\hat{M}_\alpha)) &\rightarrow \tilde{K}^0(\Lambda(\hat{M})) \end{aligned}$$

являются изоморфизмами. Поэтому, ввиду предложений 1, 2, справедливы равенства

$$Z(\hat{M}) = 0, \quad Z_\chi(\hat{M}) = 0.$$

$Z(M)$ и $n^\infty(M)$ — инварианты собственного гомотопического типа M . $Z_\chi(M)$ — только комбинаторный инвариант, как следует из ⁽³⁾.

Хорошо известно, что произведение двух открытых связных многообразий $M_1 \times M_2$ имеет один конец.

Легко проверить, что если M_1, M_2 гомотопически конечно, то

$$Z(M_1 \times M_2) = 0, \quad Z_x(M_1 \times M_2) = 0.$$

Последнее равенство сформулировано в (4).

Если M_1 и M_2 односвязны и имеют конечное число концов, то фундаментальная группа конца $M_1 \times M_2$ стабильна и изоморфна свободной группе с $(n_1 - 1)(n_2 - 1)$ образующими, где n_i — число концов M_i . Если M_1 имеет один конец и односвязно, то фундаментальная группа конца $M_1 \times M_2$ стабильна и изоморфна $\pi_1(M_2)$.

Если $\hat{X}$ — регулярное накрытие конечного комплекса X , $\pi_1(X)/\pi_1(\hat{X})$ стабильно, $\pi_1(\hat{X})$ конечно представимо, то концы группы $\pi_1(X)/\pi_1(\hat{X})$ естественно отождествляются с концами $\hat{X}$, фундаментальная группа i -го конца $\hat{X}$ стабильна и изоморфна $\pi_1(\hat{X}) \times_{\pi_1^\infty(\pi_1(X)/\pi_1(\hat{X}))} \pi_1(X)$, i . Этот факт используется при доказательстве основной леммы.

Если замкнутое многообразие $M^n = K(\pi, 1)$ является комплексом Эйленберга — Маклейна, то $M^n \times R \approx R^{n+1}$, $n \geq 5$. Если также π односвязно, то $M^n \approx R^n$, $n \geq 6$.

В заключение автор пользуется случаем выразить благодарность чл.-корр. АН СССР П. С. Новикову за научное руководство.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
26 IX 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Л. Бразман, Усп. матем. наук, т. 34, 165 (1974). ² W. Browder, Am. J. Math., v. 87, 1017 (1965). ³ В. Л. Голо, Изв. АН СССР, сер. матем., 31, 1091 (1967). ⁴ L. Siebenmann, Notes of Am. Math. Soc., v. 12, № 3, 337 (1965). ⁵ L. Siebenmann, Trans. Am. Math. Soc., v. 142, 201 (1969). ⁶ L. Siebenmann, Koninkl. Ned. Akad. Wet., v. 73, 479 (1970). ⁷ П. С. Новиков, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 30, 207 (1966). ⁸ C. T. C. Wall, Am. Math., v. 81, 56 (1965).