Доклады Академии наук СССР
1975. Том 221, № 4

УДК 513.88:513.83

МАТЕМАТИКА

В. П. ЗАХАРЮТА

ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ И КВАЗИЭКВИВАЛЕНТНОСТИ БАЗИСОВ ДЛЯ СТЕПЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ КЁТЕ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 11 IX 1974)

1. Для степенных пространств Кёте (определения см. ниже) конечного и бесконечного типов (т. е. изоморфных конечным и бесконечным центрам абсолютной шкалы ([1])) указанные в заглавии вопросы изучались в ([1-6]) и были полностью решены в ([5], [6]) *. В заметке эти вопросы изучаются для смешанных степенных пространств; такие пространства часто не различаются известными инвариантами (например, диаметральными размерностями $\delta(X)$, $\delta'(X)=\Gamma(X)$ ([7], [1])). Поэтому важное место в доказательствах занимают инвариантные характеристики для пространств Кёте (лемма 4), обобщающие результат Б. С. Митягина (([6]), § 3) об инварианте на классе центров шкал. Используются методы и результаты из ([5], [6]) и теорема Драгилева о базисах в ядерных пространствах (([8]), лемма 2; ([9]), лемма 2.0).

2. Обозначим $K(a_{\nu,p})$ пространство Кёте, задаваемое матрицей $(a_{\nu,p})$, $p\in\mathbf{N}=\{1, 2, \ldots\}$, $\nu\in\mathfrak{N}$; $\mathfrak{N}$ — некоторое счетное множество; орты $\{e_\nu\}$ будем называть основным базисом в $K(a_{\nu,p})$. Обозначим

$$E_0(a)=K\left(\exp-\frac{1}{p}a_i\right),\qquad E_\infty(a)=K(\exp pa_i),$$

E_0, E_∞ — соответственно конечный и бесконечный центры абсолютной шкалы ([1]), $a=(a_i,\ i\in\mathbf{N})$. Определим класс $\mathscr{E}$ всех пространств вида

$$E(\lambda,a)\overset{\text{def}}{=}K\left(\exp\left(-\frac{1}{n}+\lambda_i p\right)a_i\right),\quad a=(a_i),\quad \lambda=(\lambda_i),\quad a_i\geqslant 1,\quad 0<\lambda_i\leqslant 1.$$

Будем называть их *степенными пространствами* Кёте *конечного*, *бесконечного* (ср. ([2])) или *смешанного типов* соответственно в случаях:

а) $\overline{\lim}\,\lambda_i=0$;
б) $\underline{\lim}\,\lambda_i>0$;
в) $\overline{\lim}\,\lambda_i>0$, $\underline{\lim}\,\lambda_i=0$.

Если $a_i\to\infty$, то случай а) равносилен $E(\lambda,a)\simeq E_0(a)$, а случай б) $E(\lambda,a)\simeq E_\infty(b)$. Класс $\mathscr{E}$ содержит (с точностью до изоморфизма) декартовы и тензорные (проективные) произведения (([11]), стр. 119) пространств конечного и бесконечного типов: $E_0(a)\times E_\infty(b)$, $E_0(a)\otimes E_\infty(b)$. Последнее пространство мы будем отождествлять с пространством Кёте

$$K\left(\exp\left(-\frac{1}{p}a_i+pb_j\right)\right).$$

---

* Пользуясь случаем, отмечу, что в моей статье ([4]) в доказательстве теоремы о квазиэквивалентности базисов в бесконечном центре монтелевской шкалы обнаружилась ошибка. Первое доказательство этого факта (причем без требования монтелевости) дано Б. С. Митягиным ([5], [6]).

3. Два безусловных базиса $\{x_\nu, \nu\in\mathfrak{N}\}$ в X, $\{y_\mu, \mu\in\mathfrak{M}\}$ в Y называют: а) квазиэквивалентными ([1]), б) перестановочно эквивалентными, если существует изоморфизм $T\colon X\to Y$ вида

$$Tx_\nu=\gamma_\nu y_{\tau(\nu)}, \quad \nu\in\mathfrak{N}, \tag{1}$$

где $\tau\colon \mathfrak{N}\to\mathfrak{M}$, в случае б) $\gamma_\nu\equiv1$. Если в пространствах Кёте X, Y основные базисы удовлетворяют а), б), будем писать соответственно $X\overset{\text{к}}{\simeq}Y$, $X\overset{\text{п}}{\simeq}Y$; если в (1) $T\colon X\to Y$ — лишь «изоморфизм в», то будем писать $X\overset{\text{к}}{\subsetsim}Y$, $X\overset{\text{п}}{\subsetsim}Y$ *.

Следующая лемма по существу содержится в (([6]), § 4, 5).

Лемма 1. *Пусть X, Y — F-пространства. Тогда*

$$X\overset{\text{к}}{\subsetsim}Y, \quad Y\overset{\text{к}}{\subsetsim}X\Rightarrow X\overset{\text{к}}{\simeq}Y.$$

4. Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. *Пусть $X=E(\lambda, a)$, $Y=E(\mu, b)$, $X\overset{\text{п}}{\simeq}X^2\overset{\text{def}}{=}X\times X$. Пусть $X\simeq Y$. Тогда $X\overset{\text{п}}{\simeq}Y$.*

Следствие 1. *$X=E_0(a)\otimes E_\infty(b)$, $Y=E_0(a')\otimes E_\infty(b')$ и либо $E_0(a)\simeq$ $\simeq E_0(a)$, либо $E_\infty(b)\overset{\text{п}}{\simeq}E_\infty(b)^2$.*

Тогда из $X\simeq Y$ вытекает $X\overset{\text{п}}{\simeq}Y$.

Теорема 2. *Пусть $X=E_0(a)\otimes E_\infty(b)$, $Y=E_0(a')\otimes E_\infty(b')$ и последовательности a, b, a', b' удовлетворяют условиям вида: $a_i\uparrow\infty$, $a_{2i}\asymp a_i$.*

Тогда из $\delta(X)=\delta(Y)$ вытекает $X\simeq Y$ и, более того, $X\overset{\text{п}}{\simeq}Y$.

В качестве следствий выводятся следующие результаты, полученные независимо автором ([15]) и П. Джаковым ([16]).

1. *Пусть $X=E_0(i^\alpha)\otimes E_\infty(i^\beta)$, $Y=E_0(i^{\alpha'})\otimes E_\infty(i^{\beta'})$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

а) $X\simeq Y$;

б) $X\overset{\text{п}}{\simeq}Y$;

в) $1/\alpha+1/\beta=1/\alpha'+1/\beta'$.

2. *$A(U^{n-k}\times\mathbf{C}^k)\simeq A(U^{n-1}\times\mathbf{C}^1)$, $0<k<n$, где U^n — единичный полидиск в $\mathbf{C}^n$, а через $A(D)$ обозначается пространство всех функций, аналитических в области $D\subset\mathbf{C}^n$.*

Отметим, что эти утверждения опровергают гипотезу, высказанную в (([2]), стр. 157).

Теорема 3. *Пусть $X=E(\lambda, a)$ ядерно и $X\overset{\text{п}}{\simeq}X^2$. Тогда все базисы в X квазиэквивалентны.*

Из этой теоремы легко выводится следующий частный результат ([15]), дающий положительный ответ на вопрос, поставленный в (([9]), стр. 316): *в пространстве $X=E_0(i^\alpha)\otimes E_\infty(i^\beta)$ все базисы квазиэквивалентны.*

Основные результаты выводятся из приводимых ниже лемм, представляющих, как нам кажется, самостоятельный интерес.

5. Лемма 2. *Следующие утверждения равносильны:*

а) $E(\lambda, a)\overset{\text{к}}{\simeq}E(\mu, b)$;

б) $E(\lambda, a)\overset{\text{п}}{\simeq}E(\mu, b)$;

в) *существует биективное отображение $\tau\colon \mathbf{N}\to\mathbf{N}$ такое, что $a_i\asymp b_{\tau(i)}$ ** и для всякой подпоследовательности i_k, удовлетворяющей условию $a_{i_k}\to\infty$, соотношения $\lambda_{i_k}\to0$ и $\mu_{\tau(i_k)}\to0$ одновременно выполняются или нет.*

---

* Изоморфизм и квазиэквивалентность базисов для декартовых произведений рассматривались в ([12−14]).

** $a_i\asymp b_i\overset{\text{def}}{=}\exists c\colon a_i\leqslant cb_i,\ b_i\leqslant ca_i$.

Лемма 3. *Пусть* $X=K(a_{i,p})$, $Y=K(b_{ip})$. *Тогда из* $X^2 \overset{\text{п}}{\simeq} Y^2$ *следует* $X \overset{\text{п}}{\simeq} Y$.

6. Лемма 4* (ср. ([10]), леммы 2, 3). *Пусть* $K(a_{\nu,p}) \simeq K(_{\mu,p})$. *Тогда* $\forall p' \exists p \forall q \exists q' \forall r' \exists r \forall s \exists s' \exists c \forall t$, $\tau, \sigma>0$:

$$\left|\left\{\nu : \frac{a_{\nu,q}}{a_{\nu,p}} > t, \frac{a_{\nu,r}}{a_{\nu,q}} \leqslant \tau, \frac{a_{\nu,s}}{a_{\nu,r}} > \sigma\right\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\left\{\mu : \frac{b_{\mu,q'}}{b_{\mu,p'}} > \frac{t}{c}, \frac{b_{\mu,r'}}{b_{\mu,q'}} \leqslant c\tau, \frac{b_{\mu,s'}}{b_{\mu,r'}} > \frac{\sigma}{c\tau}\right\}\right|.$$

Основу доказательства этой леммы составляют методы (([6]), § 3), очищенные от «шкальных» подробностей.

7. Следующая лемма выводится из предыдущей с учетом специального вида матрицы Кёте для пространств класса $\mathscr{E}$.

Лемма 5**. *Пусть* $E(\lambda, a) \simeq E(\mu, b)$. *Тогда* $\forall B \exists A \forall \delta \exists \varepsilon \forall \varepsilon' \exists \delta'$:

а) $\left|\left\{i : \mu_i>\delta, \frac{t}{B} < b_i \leqslant Bt\right\}\right| \lessapprox \left|\left\{i : \lambda_i>\varepsilon, \frac{t}{A} < a_i \leqslant At\right\}\right|$,

б) $\left|\left\{i : \mu_i \leqslant \varepsilon, \frac{t}{B} < b_i \leqslant Bt\right\}\right| \lessapprox \left|\left\{i : \lambda_i \leqslant \delta, \frac{t}{A} < a_i \leqslant At\right\}\right|$,

в) $\left|\left\{i : \varepsilon'<\mu_i \leqslant \varepsilon, \frac{t}{B} < b_i \leqslant Bt\right\}\right| \lessapprox \left|\left\{i : \delta'<\lambda_i \leqslant \delta, \frac{t}{A} < a_i \leqslant At\right\}\right|$,

8. Лемма 6. *Пусть* $X=E(\lambda, a)$, $Y=E(\mu, b)$ *и* $\forall B \exists A \forall \delta \exists \varepsilon \forall \varepsilon' \exists \delta'$ *такие, что выполняются условия* а) — в) *леммы* 5.

Тогда $X \overset{\text{п}}{\subsetapprox} Y^k$, $Y \overset{\text{п}}{\subsetapprox} X^k$ *при некотором натуральном* k.

Важное место в доказательстве леммы 6 занимает комбинаторная лемма Митягина (([6]), лемма 10).

Подробные доказательства приведенных здесь результатов предполагается опубликовать в Трудах 7 зимней математической школы-симпозиума в Дрогобыче.

Ростовский государственный университет

Поступило 26 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Б. С. Митягин*, УМН, т. 16, № 14, 63 (1961). [2] *S. Rolewicz*, Studia math., v. 21, 135 (1962). [3] *В. П. Захарюта*, ДАН, т. 180, № 4, 786 (1969). [4] *В. П. Захарюта*, ДАН, т. 189, № 1, 26 (1969). [5] *B. Mitiagin*, C. R., v. 296, 426 (1969). [6] *Б. С. Митягин*, Studia math., v. 37, 101 (1970). [7] *C. Bessaga, A. Pelczynski, S. Rolewicz*, Bull. Acad. Pol. Sci., v. 9, 677 (1961). [8] *М. М. Драгилев*, Матем. сборн., т. 80, № 2, 225 (1969). [9] *C. Bessaga*, Studia math., v. 37, 101 (1970). [10] *В. П. Захарюта*, Математический анализ и его приложения, Ростов-на-Дону, т. 2, 3 (1970); т. 3, 176 (1971). [11] *Х. Шефер*, Топологические векторные пространства, М., 1971. [12] *В. П. Захарюта*, Функцион. анализ, т. 4, № 2, 87 (1970). [13] *V. P. Zahariuta*, Studia math., v. 46, 201 (1973). [14] *М. М. Драгилев*, ДАН, т. 193, № 4, 752 (1970). [15] *В. П. Захарюта*, Изв. Северо-Кавказск. научн. центра высшей школы, Ростов-на-Дону, № 4 (1974). [16] *П. Джаков*, Тр. 6 зимней математической школы-симпозиума в Дрогобыче, 1974.

* $|A|$ означает мощность A, если A конечно, и ∞, если A бесконечно.

** Знак $\lessapprox$ означает асимптотическое неравенство, т. е. $\leqslant$ выполняется для $t \geqslant t_0$ (t_0 может зависеть от всех параметров).