

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

В. Я. ИВРИЙ

**УСЛОВИЯ КОРРЕКТНОСТИ В КЛАССАХ ЖЕВРЕ ЗАДАЧИ КОШИ
ДЛЯ НЕСТРОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ**

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 9 IX 1974)

В настоящей заметке мы укажем некоторые, в основном необходимые, условия корректности в классах Жевре нехарактеристической задачи Коши.

Введем обозначения:

$$x = (x_0, x') = (x_0, x_1, \dots, x_l) \in \Omega,$$

Ω — открытая область в R^{l+1} ;

$$\Omega_T^+ = \{x \in \Omega, x_0 \geq T\}, \quad \Omega_T = \{x \in \Omega, x_0 = T\},$$

$\bar{\Omega}$ — замыкание Ω ; $\xi = (\xi_0, \xi') = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_l) \in R^{l+1}$ — двойственные переменные,

$$D = (D_0, D') = (D_0, D_1, \dots, D_l), \quad D_j = -i \partial / \partial x_j.$$

Через $\gamma_{\text{loc}}^{n(\kappa)}(\Omega_T^+)$, где $n=0, 1, \dots, \infty, 1 < \kappa < \infty$, обозначим класс функций $u(x)$ таких, что для любого компакта $K \subset \subset \Omega_T^+$ существуют C, R такие, что

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha u(x)| \leq CR^{|\alpha|} |\alpha|^{|\alpha| \kappa}$$

для всех $\alpha, \alpha_0 \leq n$;

$$\gamma_0^{n(\kappa)}(\Omega_T^+) = \gamma_{\text{loc}}^{n(\kappa)}(\Omega_T^+) \cap C_0(\Omega_T^+).$$

Пусть

$$P = P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad P_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

Будем предполагать, что $P_m(x, (1, 0, \dots, 0))$ нигде в Ω в ноль не обращается. Будем также предполагать, что $a_\alpha(x)$ аналитичны в Ω ; однако теорему 3 можно доказать и при более слабых ограничениях.

Определение 1. Рассмотрим задачу Коши в слабой форме:

$$Pu = f; \tag{1_w}$$

$$\text{supp } u \subset \bar{\Omega}_T^+. \tag{2_w}$$

Назовем ее слабо $\gamma^{(\kappa)}$ -корректной, если для любой $f \in \gamma_0^{\infty(\kappa)}(\Omega_T^+)$ существует $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, удовлетворяющая (1_w), (2_w) в Ω .

Назовем ее слабо локально $\gamma^{(\kappa)}$ -корректной, если для любой $f \in \gamma_0^{\infty(\kappa)}(\Omega_T^+)$ существуют окрестность $\Omega_T, \Omega' \subset \Omega$, и $u \in \mathcal{D}'(\Omega')$, удовлетворяющая (1_w), (2_w) в Ω' .

Определение 2. Рассмотрим задачу Коши в сильной форме:

$$Pu = f; \tag{1_s}$$

$$D_0^j u|_{\Omega_T} = g_j, \quad j = 0, \dots, m-1. \tag{2_s}$$

Назовем ее сильно $\gamma^{n(\kappa)}$ -корректной, если для любых $f \in \gamma_{loc}^{n(\kappa)}(\Omega_T^+)$, $g_j \in \gamma_{loc}^{n(\kappa)}(\Omega_T)$, $j=0, \dots, m-1$, существует $u \in \gamma_{loc}^{n+m(\kappa)}(\Omega_T^+)$, удовлетворяющая (1_s) , (2_s) в Ω_T^+ .

Назовем ее сильно локально $\gamma^{n(\kappa)}$ -корректной, если для любых $f \in \gamma_{loc}^{n(\kappa)}(\Omega_T^+)$, $g_j \in \gamma_{loc}^{n(\kappa)}(\Omega_T)$, $j=0, \dots, m-1$, существуют окрестность $\Omega_T, \Omega' \subset \Omega$, и $u \in \gamma_{loc}^{n+m(\kappa)}(\Omega_T'^+)$, удовлетворяющая (1_s) , (2_s) в $\Omega_T'^+$.

Замечание. Мы не требовали единственности в определениях корректности, так как единственность в областях-линзах пространственного типа вытекает из теоремы Хольмгрена.

Теорема 1. Если задача Коши (1_w) , (2_w) слабо локально $\gamma^{(\kappa)}$ -корректна при любом $T \geq T_0$, то P гиперболичесен в $\Omega_{T_0}^+$ относительно x_0 , т. е. все корни ξ_0 характеристического уравнения

$$P_m(x, \xi_0, \xi') = 0.$$

вещественны при $x \in \Omega_{T_0}^+$, $\xi' \in R^l$.

Обратно, если P гиперболичесен в Ω_T^+ относительно x_0 и Ω_T^+ — линза пространственного типа, то существует $\kappa^* > 1$ такое, что задача Коши (1_s) , (2_s) сильно $\gamma^{n(\kappa)}$ -корректна при $\kappa < \kappa^*$, $n=0, 1, \dots, \infty$ ⁽¹⁾.

Определение 3. Вещественную аналитическую функцию $\varphi(x)$, определенную в окрестности $\hat{x} \in \Omega$, назовем фазой кратности r , если

$$P_m^{(\alpha)}(x, \varphi_x) = 0$$

при всех α , $|\alpha| < r$,

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial \xi_0} \right)^r P_m \right) (\hat{x}, \varphi_x(\hat{x})) \neq 0, \quad \varphi_x(\hat{x}) \neq 0$$

Теорема 2. Пусть $\varphi(x)$ — вещественная аналитическая фаза кратности r в окрестности $\hat{x} \in \Omega_{T_0}^+$.

Тогда, если задача Коши (1_w) , (2_w) слабо $\gamma^{(\kappa)}$ -корректна при любом $T \geq T_0$, то выполнено условие:

(L_κ) Для всех вещественных $\psi \in C^\infty(\Omega)$ и всех $h \in C_0^\infty(\Omega_{T_0}^+)$, носитель которых содержится в достаточно малой окрестности \hat{x} ,

$$P(e^{i\varphi\psi + i\psi\rho^{1/\kappa}} h) = \rho^{m-r(1-1/\kappa)} e^{i\varphi\psi + i\psi\rho^{1/\kappa}} \left(\sum_{|\alpha|=r} \frac{\psi_x^\alpha}{\alpha!} P_m^{(\alpha)}(x, \varphi_x) h + o(1) \right)$$

при вещественном $\rho \rightarrow +\infty$.

Если же задача Коши (1_w) , (2_w) слабо локально $\gamma^{(\kappa)}$ -корректна при любом $T \geq T_0$, то выполнено условие:

(L_κ^{loc}) Для всех ψ, h , описанных в (L_κ) ,

$$P(e^{i\varphi\psi + i\psi\rho^{1/\kappa}} h) = O(\rho^{m-r(1-1/\kappa)})$$

при вещественном $\rho \rightarrow +\infty$.

Замечания. 1. Очевидна аналогия между условиями (L_κ) , (L_κ^{loc}) и необходимым условием C^∞ -корректности ^(2, 3):

(L) Для всех h , описанных в (L_κ) ,

$$P(e^{i\varphi\psi} h) = O(\rho^{m-r})$$

при вещественном $\rho \rightarrow +\infty$.

Условие (L) называется условием Е. Е. Леви. Поэтому условия (L_κ) , (L_κ^{loc}) будем называть обобщенными условиями Леви.

2. Нетрудно показать, что $(L) \Rightarrow (L_\kappa) \Rightarrow (L_\kappa^{loc}) \Rightarrow (L_{\kappa'})$ при $\kappa > \kappa'$; при этом существенно различны лишь условия (L) , $(L_{i/j}^{loc})$, $1 \leq j < i \leq r$.

Рассмотрим операторы с характеристическими корнями постоянной кратности:

$$P_m(x, \xi) = a_0(x) \prod_{j=1}^s (\xi_0 - \lambda_j(x, \xi'))^{r_j}, \quad r_1 + \dots + r_s = m,$$

при $x \in \Omega$, $\xi' \in R^l \setminus \{0\}$,

$$\lambda_1(x, \xi') < \lambda_2(x, \xi') < \dots < \lambda_s(x, \xi').$$

Для таких операторов известно ⁽¹⁾, что если условие (L) выполнено для всех фаз $\varphi(x)$, то задача Коши будет C^∞ -корректной в любой линзе пространственного типа. Справедлива

Теорема 3. Пусть P — гиперболический относительно x_0 в Ω_T^+ оператор с характеристическими корнями постоянной кратности и Ω_T^+ — линза пространственного типа.

Тогда, если для всех $\hat{x} \in \Omega_T^+$ и всех вещественных аналитических фаз φ условие (L_n) (или L_x^{loc}) выполнено, то задача Коши (1_s) , (2_s) будет сильно $\gamma^{n(n)}$ -корректной (соответственно сильно локально $\gamma^{n(n)}$ -корректной), $n=0, 1, \dots, \infty$.

Магнитогорский горно-металлургический институт

Поступило
25 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. Я. Иеруй, УМН, т. 29, № 6 (1974). ² H. Flaschka, G. Strang, Adv. in Math., v. 6, № 3, 347 (1970); Сб. пер.: Математика, т. 16, № 2, 74 (1973). ³ В. Я. Иеруй, В. М. Петков, УМН, т. 29, № 5 (1974). ⁴ J. Chazarain, C. R., v. A273, № 25, A1218 (1974). ⁵ J. Leray, Yu. Ohyu, Colloque sur l'analyse fonctionnelle, 2-me, Liège, 1964, p. 145.