

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

С. Н. КРУЖКОВ, А. КАСТРО, М. ЛОНЕС

ОЦЕНКИ ШАУДЕРОВСКОГО ТИПА И ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 24 VI 1974)

В настоящей работе рассматриваются смешанные задачи и задача Коши для линейных параболических уравнений

$$u_t = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) u_{x_i} + c(t, x) u = f(t, x) \quad (1)$$

и для общего нелинейного параболического уравнения вида

$$u_t = \mathcal{A}(t, x, u, u_x, u_{xx}) \quad (2)$$

в цилиндрической области $Q = [0, T] \times \bar{\Omega}$ при нулевом начальном условии

$$u|_{t=0} = 0 \quad (3)$$

и с одним из следующих условий на боковой поверхности S цилиндра Q :

$$u|_S = 0 \quad (4)$$

или

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_S = \varphi(t, x, u). \quad (5)$$

Здесь $x = (x_1, \dots, x_n)$ — точка области Ω в n -мерном евклидовом пространстве E_n , t — точка оси t , $S = [0, T] \times \partial\Omega$, где $\partial\Omega$ — граница области Ω , $\bar{\Omega}$ — замыкание области Ω , $\nu = \nu(x)$ — внутренняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке $x \in \partial\Omega$, $u_x = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$, $u_{xx} = (\dots, u_{x_i x_j}, \dots)$, $1 \leq i, j \leq n$. В случае задачи Коши под Q будем понимать слой $[0, T] \times E_n$.

На основе новых априорных оценок шаудеровского типа для решений линейного уравнения (1), уточняющих широкоизвестные оценки Чилиберто ⁽¹⁾, Баррара ⁽²⁾, Фридмана ⁽³⁾, в этой работе мы устанавливаем соответствующие теоремы о разрешимости основных смешанных задач и задачи Коши как для линейного уравнения (1), так и для нелинейного параболического уравнения (2).

Новизна в оценках шаудеровского типа состоит в том, что в отличие от известных результатов (⁽¹⁻⁴⁾ и др.), доказанных при выполнении условия Гёльдера по совокупности переменных (t, x) на коэффициенты уравнения (1), наши оценки (а затем и теоремы существования) получены лишь в предположении гёльдеровости коэффициентов по пространственным переменным; при этом, однако, мы получаем и оценку модуля непрерывности по t старших производных $u_{x_i x_j}$ (но не u_t).

Для нелинейного уравнения (1) мы устанавливаем локальные (по времени t) теоремы существования решений рассматриваемых задач.

Вопросы локальной разрешимости первой краевой задачи и задачи Коши для нелинейных параболических уравнений рассматриваются в ⁽⁵⁻⁸⁾. Во всех этих работах для доказательства локальных теорем существования

применяется идея казилинеаризации: уравнение (или система нелинейных уравнений) дифференцируется по независимым переменным и изучается квазилинейная система уравнений относительно первых производных функции $u(t, x)$.

Применение идеи казилинеаризации, привнесенной в теорию параболических уравнений, по-видимому, из классической теории уравнений первого порядка (из теории Гамильтона — Якоби) и дающей в последней теории точные результаты, приводит к необходимости требовать завышенные условия гладкости функций $\mathcal{A}$ и φ , определяющих постановку задач, а также гладкости начальной функции (при рассмотрении случая ненулевого начального условия) и выполнения дополнительных условий согласования на границе нижнего основания цилиндра Q .

В настоящей статье линеаризуется непосредственно уравнение (2). Никаких условий на характер роста нелинейности функций $\mathcal{A}$ и φ , определенных для $(t, x) \in Q$ и любых u, u_x, u_{xx} , здесь не накладывается. Основным предположением относительно функции $\mathcal{A}(t, x, u, p, r)$, где $p = (p_1, \dots, p_n)$, $r = (\dots, r_{ij}, \dots)$, $1 \leq i, j \leq n$, является условие парабол и ч н о с т и: для любого ненулевого вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in E_n$ и любых $u, p, r, (t, x) \in Q$

$$(\mathcal{A}_r(t, x, u, p, r) \xi, \xi) > 0, \quad (6)$$

где $\mathcal{A}_r$ — матрица $\|\mathcal{A}_{r_{ij}}(t, x, u, p, r)\|$, а через (ξ, η) здесь и далее обозначается обычное скалярное произведение в E_n .

Относительно области Ω будем предполагать следующее: существует такое число $\rho_0 > 0$, что часть границы $\partial\Omega$, попавшая в шар $\{|x - x_0| < \rho_0\}$, где x_0 — произвольная точка $\partial\Omega$, представляема уравнением $x_i = h^{x_0}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$, причем функции h^{x_0} обладают вторыми производными, ограниченными и удовлетворяющими условию Гёльдера с показателем $\beta \in (0, 1)$ равномерно по x_0 .

Для непрерывных в цилиндре Q функций $u(t, x)$ введем следующие нормы:

$$|u|_{0,0}^{[1]} = \sup_{0 \leq t \leq 1} |u|_{0,0}^r, \quad |u|_{0,\alpha}^{[1]} = \sup_{0 \leq t \leq 1} |u|_{0,\alpha}^r, \quad (7)$$

где

$$|u|_{0,0}^t = \sup_{x \in \Omega} |u(t, x)|, \quad |u|_{0,\alpha}^t = |u|_{0,0}^t + H_\alpha^t(u), \quad (8)$$

$$H_\alpha^t(u) = \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|u(t, x) - u(t, y)|}{|x - y|^\alpha}, \quad \alpha = \text{const} \in (0, 1). \quad (9)$$

Кроме того, для любого целого $m \geq 0$ при $\alpha \in [0, 1)$ положим

$$|u|_{m,\alpha}^{[1]} = \sum_{l \leq m} |D^l u|_{0,\alpha}^{[1]}, \quad D^0 u \equiv u, \quad (10)$$

где $D^l u$ — некоторая производная от $u(t, x)$ по x порядка l и суммирование в (10) производится по всем таким производным.

Через $C_{m,\alpha}^{(1)}$ будем обозначать совокупность функций, непрерывных в цилиндре $[0, t] \times \Omega$ вместе с производными по x до порядка m включительно и имеющих конечную норму (10).

Относительно коэффициентов уравнения (1) предположим, что выполняется условие равномерной парабол и ч н о с т и: для любого вектора $\xi \in E_n$ и $(t, x) \in Q$

$$\lambda^{-1} |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \leq \lambda |\xi|^2, \quad \lambda = \text{const} > 0, \quad (11)$$

$$\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|_{0,\beta}^{[T]} + \sum_{i=1}^n |b_i|_{0,\beta}^{[T]} + |c|_{0,\beta}^{[T]} = N < \infty. \quad (12)$$

Через M_1 , M_2 и т. д. будем обозначать константы, зависящие лишь от «данных» рассматриваемых задач.

Теорема 1. Пусть $\Omega = E_n$ и функция $u(t, x) \in C_{2,\beta}^{(T)}$ является решением задачи (1), (3) в слое Q , причем в (1) $f = f_1 + f_2$, $f_1 \in C_{0,\beta}^{[T]}$, $f_2 \in C_{0,\alpha}^{[T]}$, $\alpha > \beta$.

Тогда при $0 \leq t \leq T$ выполняется неравенство

$$|u|_{2,\beta}^{[t]} \leq M_1 \left[|f_1|_{0,\beta}^{[t]} + \int_0^t (t-\tau)^{(\alpha-\beta)/2-1} |f_2|_{0,\alpha}^{[\tau]} d\tau \right]. \quad (13)$$

Относительно характера непрерывности по t имеет место следующее предложение.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 выполняются следующие неравенства при $0 \leq t_1 < t_2 \leq t \leq T$:

$$|u(t_1, x) - u(t_2, x)| \leq M_3 B |t_1 - t_2|,$$

где B — выражение, стоящее в квадратной скобке в соответствующей оценке (13),

$$|u_{x_i}(t_1, x) - u_{x_i}(t_2, x)| \leq M_4 B |t_1 - t_2|^{1/2}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$|u_{x_i x_j}(t_1, x) - u_{x_i x_j}(t_2, x)| \leq M_5 B |t_1 - t_2|^{\beta/(2+\beta)}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Теорема 2 доказывается при помощи следующего утверждения интерполяционного характера.

Лемма. Пусть $u(t, x) \in C_{m,\beta}^{[T]}$ и для $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$, $x \in \bar{\Omega}$ выполняется неравенство

$$|u(t_1, x) - u(t_2, x)| \leq H |t_1 - t_2|^\gamma, \quad \gamma \in (0, 1].$$

Пусть область Ω удовлетворяет условию конуса (см. (9)). Тогда

$$|D^m u(t_1, x) - D^m u(t_2, x)| \leq c H^{\beta/(m+\beta)} (|u|_{m,\beta}^{[T]})^{m/(m+\beta)} |t_1 - t_2|^{T\beta/(m+\beta)}. \quad (14)$$

Замечание. Рассмотрение функции $(|x|^{2(m+\beta)} + H^2 t^{2\gamma})^{1/2}$ в окрестности начала координат показывает точность результата леммы.

Справедливо следующее предложение о разрешимости задачи Коши.

Теорема 3. В условиях теоремы 1 относительно коэффициентов уравнения (1) и функции $f(t, x)$ задача (1), (3) в слое Q имеет единственное решение $u(t, x) \in C_{2,\beta}^{[T]}$, обладающее непрерывной производной u_t .

Для решений смешанных задач оценка (13) во всем замкнутом цилиндре Q , вообще говоря, неверна. Например, решением уравнения $u_t = u_{xx} + f(t)$ в полушаре $\{0 \leq t \leq 1, x \geq 0\}$ с нулевыми условиями при $t=0$ и при $x=0$ является функция

$$u(t, x) = \int_0^1 \Phi \left(\frac{x}{2(t-\tau)^{1/2}} \right) f(\tau) d\tau, \quad \Phi(\sigma) = \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^\sigma e^{-\eta^2} d\eta;$$

для отрицания выполнения обсуждаемой оценки вплоть до боковой границы $x=0$ достаточно заметить, что при ступенчатой функции $f(t)$ с точками разрыва $t=t_k \in (0, 1)$ производные $u_{xx}(t, x)$ разрывны в точках $(t_k, 0)$.

Если в дополнение к условиям (1) и (12) коэффициенты уравнения (1) и функция $f(t, x)$ удовлетворяют условию Гельдера по t в неко-

торой области, примыкающей к S , то оценки, аналогичные (13), очевидно, будут выполняться и для решений смешанных задач с нулевыми условиями (3) — (5); из этих оценок, как и в случае задачи Коши, вытекают соответствующие теоремы о разрешимости в пространствах $C_{2,\beta}^{[T]}$.

Переходим теперь к формулировке локальных теорем существования решений рассматриваемых здесь задач для нелинейного уравнения (2).

Теорема 4. В дополнение к условию (6) предположим, что в некоторой области $\{(t, x) \in Q, |u| \leq M, |p| \leq M, |r| \leq M\}$ функция $\mathcal{A}(t, x, u, p, r)$ непрерывна вместе с производными по u, p, r и до второго порядка включительно, причем эта функция и указанные ее производные удовлетворяют условию Липшица по u, p, r и условию Гёльдера с показателем β по x и, кроме того, $\mathcal{A}(t, x, 0, 0, 0) \in C_{0,\alpha}^{[T]}$, $\alpha > \beta$. Пусть Q — слой $[0, T] \times E_n$.

Тогда можно указать такое t_0 , определяемое сделанными предположениями, что в слое $[0, t_0] \times E_n$ существует единственное решение $u(t, x) \in C_{2,\beta}^{[t_0]}$ задачи Коши (2), (3), обладающее непрерывной производной u_t . Это решение может быть получено как предел при $m \rightarrow \infty$ по норме $|\cdot|_{2,\beta}^{[t_0]}$ решений $u^m(t, x)$ уравнения ($m=1, 2, \dots$; $u^0(t, x) \equiv 0$)

$$u_t^m = L(u^m) + \mathcal{A}(t, x, 0, 0, 0) + F(t, x, u^{m-1}, u_x^{m-1}, u_{xx}^{m-1}), \quad (15)$$

$$L(u) = \mathcal{A}_u(t, x, 0, 0, 0)u + (\mathcal{A}_p(t, x, 0, 0, 0), u_x) + (\mathcal{A}_r(t, x, 0, 0, 0), u_{xx}),$$

$$F(t, x, u, u_x, u_{xx}) = \mathcal{A}(t, x, u, u_x, u_{xx}) - \mathcal{A}(t, x, 0, 0, 0) - L(u)$$

с нулевым начальным условием (2).

Теорема 5. Пусть для функции $\mathcal{A}(t, x, u, p, r)$ выполняются условия теоремы 4 и, кроме того, эта функция и ее производные по u, p, r до второго порядка удовлетворяют условию Гёльдера по t ; пусть выполнено условие согласования

$$\mathcal{A}(0, x, 0, 0, 0)|_{\partial\Omega} = 0.$$

Тогда в некотором цилиндре $[0, t_0] \times \bar{\Omega}$ существует единственное решение задачи (2), (3), (4) в классе функций, обладающих непрерывными по Гёльдеру производными, входящими в уравнение (2). Аналогичное утверждение справедливо и для задачи (2), (3), (5), если функция $\Phi(t, x, u)$ в условии (5) — достаточно гладкая (например, дважды непрерывно дифференцируемая) и удовлетворяет условию согласования

$$\Phi(0, x, 0)|_{\partial\Omega} = 0.$$

Для доказательства теоремы 5 рассматривается итерационный процесс, основанный на последовательном решении уравнения (15) с соответствующими граничными условиями.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Гаванский университет и
Гаванский педагогический институт
Куба

Поступило
13 IV 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ C. Ciliberto, Rice. mat., v. 3, 40 (1954). ² R. B. Barrar, J. Math. Anal. and Appl., v. 3, № 2, 373 (1961). ³ А. Фридман, Уравнения с частными производными параболического типа, М., 1968. ⁴ В. А. Солонников, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 83 (1965). ⁵ С. Д. Эйдельман, Параболические системы, «Наука», 1964. ⁶ С. И. Худяев, ДАН, т. 149, № 3, 535 (1963). ⁷ Н. Н. Шополов, Докл. Болг. акад. наук, т. 23, № 8, 899 (1970). ⁸ С. Н. Кружков, К нелокальной теории краевых задач и задачи Коши для нелинейных уравнений с частными производными, Докт. дисс., МГУ, 1970. ⁹ L. Nirenberg, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, v. 13, Ser. III, Fasc. II, 115 (1959).