

Г. И. ЛАПТЕВ

УСЛОВИЯ РАВНОМЕРНОЙ КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 24 VI 1974)

В книге ⁽¹⁾ для исследования задачи Коши для систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных предложен метод теории полугрупп операторов. Использование этого метода дало возможность автору в ⁽²⁾ найти необходимые и достаточные условия равномерной корректности задачи Коши для систем второго порядка. В настоящей работе эти условия обобщаются на системы произвольного порядка. Предлагаемый критерий равномерной корректности существенно отличается от критерия, данного в ⁽³⁾. Например, теорема 3 сразу подтверждает равномерную корректность системы, правая часть которой определяется матрицей $\begin{pmatrix} i\xi & \xi \\ 0 & -i\xi \end{pmatrix}$ тогда как для применения метода Г. О. Крейсса эту матрицу необходимо еще преобразовать к специальному виду.

Рассмотрим задачу Коши

$$\partial u / \partial t = a(D)u(t, y), \quad u(0, y) = u_0(y), \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Здесь $u(t, y) = (u_1, \dots, u_m)$ — искомая вектор-функция зависящая от времени t и точки $y = (y_1, \dots, y_n)$ пространства R_n , $a(D) = (a_{ij}(D))$, $i, j = 1, \dots, m$, — матрица операторов, D — формальный вектор с компонентами $-i \partial / \partial y_j$. Операторы $a_{ij}(D)$, составляющие матрицу $a(D)$, предполагаются псевдодифференциальными с ядрами, не зависящими от переменной y , и действуют по формуле

$$a_{ij}(D)u = (2\pi)^{-n/2} \int a_{ij}(\xi) \tilde{u}(\xi) e^{iy\xi} d\xi,$$

где $\tilde{u}(\xi)$ — преобразование Фурье функции $u(y)$.

Следуя ⁽¹⁾, будем рассматривать (1) как эволюционное уравнение в пространстве $\mathcal{L}_2(R_n)$ с нормой $\|\cdot\|$. После применения преобразования Фурье по переменной y получается линейное дифференциальное уравнение

$$dx/dt = a(\xi)x(t, \xi), \quad x(0, \xi) = x_0(\xi),$$

где $x(t, \xi) = \tilde{u}(t, \xi)$. Решение этого уравнения дается формулой $x(t, \xi) = e^{ta(\xi)}x_0(\xi)$.

Наша основная цель — выяснить условия, при которых выполняется ограничение

$$\max_{t \geq 0} \|e^{ta(\xi)}\| \leq C. \quad (2)$$

1°. Здесь будет получено одно вспомогательное утверждение. Пусть $a = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка m , рассматриваемая как линейный оператор в конечномерном пространстве R_m . В этом пространстве мы будем различать две нормы: $|x|_1 = \sum |x_j|$ и $|x| = (\sum |x_j|^2)^{1/2}$, где $x = (x_1, \dots, x_m) \in R_m$. Если спектр матрицы a лежит в левой полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$, то показательная функция e^{ta} может быть выражена как обратное

преобразование Лапласа от резольвенты $(\lambda - a)^{-1}$ по формуле

$$e^{ta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{v-i\infty}^{v+i\infty} e^{\lambda t} (\lambda - a)^{-1} d\lambda, \quad v > 0.$$

Полагая $\lambda = v + i\mu$, запишем эту формулу в виде

$$e^{ta} = \frac{e^{tv}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu t} (v + i\mu - a)^{-1} d\mu, \quad v > 0. \quad (3)$$

Основой дальнейшего служит

Теорема 1. *Имеет место неравенство*

$$\max_{t \geq 0} |e^{ta}| \leq c \max_{\operatorname{Re} \lambda > 0} |(\operatorname{Re} \lambda) (\lambda - a)^{-1}|, \quad (4)$$

где постоянная c зависит только от порядка m матрицы a .

Для доказательства отметим, что если вещественная функция $\varphi(\mu)$ имеет l участков монотонности на оси $(-\infty, \infty)$, то для ее преобразования Фурье на основании второй теоремы о среднем значении получается оценка

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu t} \varphi(\mu) d\mu \right| \leq \frac{8l}{t} \max_{\mu} |\varphi(\mu)|. \quad (5)$$

Напомним формулу для резольвенты матрицы a :

$$(\lambda - a)^{-1} = \Delta^{-1}(\lambda) b(\lambda),$$

где $\Delta(\lambda)$ — характеристический многочлен и $b(\lambda)$ — присоединенная матрица. Из этой формулы следует, что элементы матрицы $(\lambda - a)^{-1}$ являются дробно-рациональными функциями вида $r_j(\lambda) = p_j(\lambda)/q_j(\lambda)$, где степень многочлена в знаменателе не превосходит m , а степень многочлена в числителе меньше, по крайней мере, на единицу. Если после замены $\lambda = v + i\mu$

выделить вещественную и мнимую части $r_j(\lambda) = r_j^{(1)}(\mu) + ir_j^{(2)}(\mu)$, то слагаемыми будут вновь дробно-рациональные функции переменной μ , причем степень знаменателя не превосходит $2m$. Осталось заметить, что каждая такая функция может иметь не более чем $l = 4m$ участков монотонности. Применяя неравенство (5) к каждому элементу матрицы e^{ta} , получим

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu t} (v + i\mu - a)^{-1} d\mu \right|_1 \leq \frac{c}{t} \max_{\mu} |(v + i\mu - a)^{-1}|_1.$$

Это неравенство верно для любого $v > 0$. Полагая $v = 1/t$, найдем, что

$$|e^{ta}|_1 \leq c \max_{v > 0} |v(\lambda - a)^{-1}|_1.$$

Учитывая, что в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны, мы и получаем неравенство теоремы.

Другим методом оценка (4) получена в работе ⁽⁴⁾.

2°. Вернемся к неравенству (2). Напомним, что норма оператора умножения на матрицу в пространстве $\mathcal{L}_2(R_m)$ вычисляется по формуле

$$\|e^{ta(\xi)}\| = \max_{\xi \in R_m} |e^{ta(\xi)}|.$$

Таким образом, (2) принимает вид

$$\max_{t \geq 0} \max_{\xi \in R_n} |e^{ta(\xi)}| \leq C.$$

Порядок максимумов безразличен, и применение теоремы 1 дает

$$\max_{\xi \in P_n} \max_{t \geq 0} |e^{ta(\xi)}| \leq c \max_{\xi \in R_n} \max_{\operatorname{Re} \lambda > 0} |(\operatorname{Re} \lambda)(\lambda - a)^{-1}|.$$

Это неравенство запишем в форме

$$\|e^{ta}\| \leq c \max_{\operatorname{Re} \lambda > 0} \|(\operatorname{Re} \lambda)(\lambda - a)^{-1}\|. \quad (6)$$

Таким образом, получена

Теорема 2. Для того чтобы полугруппа, порождаемая оператором a умножения на матрицу $a(\xi)$, в пространстве $\mathcal{L}_2(R_m)$ удовлетворяла неравенству $\|e^{ta}\| \leq C$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\|(\lambda - a)^{-1}\| \leq c / \operatorname{Re} \lambda, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0.$$

Действительно, необходимость этого условия хорошо известна для случая общих полугрупп операторов, а его достаточность подтверждается неравенством (6).

Теорема 2 показывает, что равномерно корректные задачи Коши для систем уравнений образуют особый класс полугрупп операторов, промежуточный между сжимающими и общими полугруппами класса C_0 (4).

3°. Теорема 2 позволяет выразить условия равномерной корректности задачи Коши (1) в терминах элементов матрицы $a(\xi)$ и ее собственных значений $\lambda_1(\xi), \dots, \lambda_m(\xi)$. По-видимому, первый критерий такого рода дан в работе (3).

В этом пункте рассмотрим случай треугольной матрицы $a(\xi)$, т. е. предположим, что $a_{ij}(\xi) = 0$ для $i < j$. Тогда, в частности, $a_{ii}(\xi) = \lambda_i(\xi)$. Треугольная форма матрицы $a(\xi)$ позволяет известными рекуррентными соотношениями найти формулу для резольвенты $(r_{ij}(\lambda, \xi)) = (\lambda - a(\xi))^{-1}$. При этом на диагонали будут стоять элементы вида $r_{ii}(\lambda, \xi) = (\lambda - \lambda_i(\xi))^{-1}$, и для ограниченности функции $(\operatorname{Re} \lambda)(\lambda - \lambda_i(\xi))^{-1}$ в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > 0$ необходимо и достаточно условие: $\operatorname{Re} \lambda_i(\xi) \leq 0$. Наддиагональные элементы в резольвентной матрице имеют вид

$$r_{i, i+1}(\xi) = a_{i, i+1}(\xi) (\lambda - \lambda_i(\xi))^{-1} (\lambda - \lambda_{i+1}(\xi))^{-1}.$$

Для их оценки рассмотрим функцию $\varphi(\lambda) = v(\lambda - \lambda_i)^{-1}(\lambda - \lambda_j)^{-1}$ и оценим ее максимум в полуплоскости $v > 0$, учитывая, что $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$, $\operatorname{Re} \lambda_j \leq 0$. Из этого предположения сразу следует, что $|\varphi(\lambda)| \leq |\lambda - \lambda_j|^{-1}$ и $|\varphi(\lambda)| |\lambda - \lambda_i|^{-1}$. Эти два неравенства можно записать как одно: $|\varphi(\lambda)| \leq 4|\lambda_i + \bar{\lambda}_j|^{-1}$ в силу неравенства $|\lambda - \lambda_i| + |\lambda - \lambda_j| \geq 1/2 |\lambda_i + \bar{\lambda}_j|$, $\operatorname{Re} \lambda > 0$. В то же время при $\lambda = -\bar{\lambda}_j$ имеем $|\varphi(-\bar{\lambda}_j)| = 1/2 |\lambda_i + \bar{\lambda}_j|^{-1}$.

Окончательно

$$1/2 |\lambda_i + \bar{\lambda}_j|^{-1} \leq \max_{v > 0} |\varphi(\lambda)| \leq 4(\lambda_i + \bar{\lambda}_j)^{-1}, \quad v = \operatorname{Re} \lambda. \quad (7)$$

Полученная двусторонняя оценка означает, что для ограниченности в полуплоскости $v > 0$ элементов $v r_{i, i+1} = a_{i, i+1} \varphi(\lambda)$ необходимы и достаточны условия

$$|a_{i, i+1}(\xi)| \leq c |\lambda_i(\xi) + \bar{\lambda}_{i+1}(\xi)|. \quad (8)$$

Для элементов $r_{i, i+2}$ рекуррентные соотношения дают

$$v r_{i, i+2} = v(\lambda - \lambda_i)^{-1} (\lambda - \lambda_{i+1})^{-1} (\lambda - \lambda_{i+2})^{-1} a_{i, i+1} a_{i+1, i+2} + v(\lambda - \lambda_i)^{-1} (\lambda - \lambda_{i+2})^{-1} a_{i, i+2}. \quad (9)$$

Вполне аналогично неравенству (7) можно показать, что

$$\max_{v > 0} |v(\lambda - \lambda_i)^{-1} (\lambda - \lambda_j)^{-1} (\lambda - \lambda_k)^{-1}| \leq 4 |\lambda_i + \bar{\lambda}_j|^{-1} |\lambda_j + \bar{\lambda}_k|^{-1},$$

поэтому ограниченность первого слагаемого в (9) следует из условий (8), а для ограниченности второго слагаемого необходимо и достаточно условие

$$|a_{i+2}(\xi)| \leq c |\lambda_i(\xi) + \bar{\lambda}_{i+2}(\xi)|.$$

Продолжая этот процесс по индукции, приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. Пусть матрица $a(\xi)$ имеет верхний треугольный вид. Для того чтобы порождаемая ею полугруппа была равномерно ограничена, т. е. $\|e^{ta(\xi)}\| \leq C$, необходимы и достаточны следующие условия:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda_i(\xi) &\leq 0, \quad i=1, \dots, m; \\ |a_{ij}(\xi)| &\leq c |\lambda_i(\xi) + \bar{\lambda}_j(\xi)|, \quad i < j. \end{aligned}$$

Отсюда обычным приемом получается

Теорема 4. Для того чтобы задача Коши (1) с треугольной матрицей $a(\xi)$ была равномерно корректной, необходимо и достаточно, чтобы существовала постоянная ω , для которой

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda_i(\xi) &\leq \omega, \quad i=1, \dots, m; \\ |a_{ij}(\xi)| &\leq c |\lambda_i(\xi) + \bar{\lambda}_j(\xi) - 2\omega|, \quad i < j. \end{aligned}$$

Применяя эту теорему к операторам a и $-a$, получаем необходимые и достаточные условия того, что a порождает группу.

4°. В этом пункте будут сформулированы необходимые и достаточные алгебраические условия равномерной корректности задачи Коши, которые не зависят от треугольного представления матрицы $a(\xi)$.

Расположим собственные значения $\lambda_j(\xi)$ в таком порядке, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\begin{aligned} |\lambda_i + \bar{\lambda}_j| &= \max_{i,j} |\lambda_i + \bar{\lambda}_j|, \quad i, j=1, \dots, m; \\ |\lambda_k + \bar{\lambda}_{k+1}| &= \max_j |\lambda_k + \bar{\lambda}_j|, \quad k=2, \dots, m-1; \quad j=k+1, \dots, m. \end{aligned}$$

Теорема 5. Пусть собственные значения матрицы $a(\xi)$ удовлетворяют приведенным выше условиям упорядоченности.

Тогда для равномерной ограниченности полугруппы: $\|e^{ta}\| \leq C$, необходимы и достаточны следующие условия:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda_i(\xi) &\leq 0, \quad i=1, \dots, m; \\ |a(\xi) - \lambda_1(\xi)| &\leq c |\lambda_1(\xi) + \bar{\lambda}_2(\xi)|, \\ |[a(\xi) - \lambda_1(\xi)][a(\xi) - \lambda_2(\xi)]| &\leq c |\lambda_1(\xi) + \bar{\lambda}_2(\xi)| |\lambda_2(\xi) + \bar{\lambda}_3(\xi)|, \\ |[a(\xi) - \lambda_1(\xi)] \dots [a(\xi) - \lambda_{m-1}(\xi)]| &\leq c |\lambda_1(\xi) + \bar{\lambda}_2(\xi)| \dots |\lambda_{m-1}(\xi) + \bar{\lambda}_m(\xi)|. \end{aligned}$$

В основе доказательства теоремы лежит представление резольвенты матрицы $a(\xi)$ в форме интерполяционного многочлена Ньютона

$$v(\lambda - a)^{-1} = \frac{v}{\lambda - \lambda_1} + \frac{v(a - \lambda_1)}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)} + \dots + \frac{v(a - \lambda_1) \dots (a - \lambda_{m-1})}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_m)}.$$

Сравнение с условиями теоремы показывает, что здесь должно быть ограничено каждое слагаемое.

Научно-исследовательский институт математики
Воронежского государственного университета
им. Ленинского комсомола

Поступило
3 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Г. Крейн, Лине́йные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, «Наука», 1967. ² G. I. Laptjev, Quart. J. Math. (Oxford) (2), v. 22, 559 (1971). ³ Г. О. Крейсс, Сборн. пер. Математика, т. 7, № 2, 39 (1963). ⁴ John Miller, Math. Comp., v. 22, 541 (1968).