Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 2

УДК 513.83+519.46

МАТЕМАТИКА

А. М. ЛУКАЦКИЙ

О СИСТЕМАХ ОБРАЗУЮЩИХ В ГРУППАХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ КОМПАКТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 24 VI 1974)

1. Пусть дано некоторое компактное C^∞-многообразие M без края. Обозначим через $D(M)$ группу его C^∞-диффеоморфизмов и через $V(M)$ алгебру Ли C^∞-векторных полей на M, снабженные естественными C^∞-топологиями. Очевидно, что $V(M)$ является топологической алгеброй, а $D(M)$ топологической группой; более того, известно, что в $D(M)$ можно ввести структуру C^∞-группы Фреше (см. ([2])). Для любой замкнутой подгруппы $H\subset D(M)$ подмножество $\mathfrak{h}(H)$, состоящее из полей, потоки которых содержатся в H, является замкнутой подалгеброй в $V(M)$ (см. ([3])); назовем $\mathfrak{h}(H)$ алгеброй Ли группы H.

Введем следующие подгруппы группы $D(M)$. Пусть $N\subset M$ — замкнутое, не обязательно связное подмногообразие, обозначим $B(N)=\{f\in D(M)\,|\,f(N)=N\}$. Для замкнутого подмножества $P\subset M$ положим $H^k(P)=\{f\in D(M)\,|\,j_x^kf=j_x^k1\quad \forall x\in P\}$, $k=0, 1, 2,\dots, \infty$. Несложно проверить, что алгеброй Ли для подгруппы $B(N)$ является $b(N)=\{v\in V(M)\,|\,v|_N\in V(N)\}$, а для $H^k(P)$ алгебра $\mathfrak{h}^k(P)=\{v\in V(M)\,|\,j_x^kv=0\ \ \forall x\in P\}$. Обозначим, кроме того, через $D_0(M)$, $B_0(N)$, $H_0^k(P)$ связные компоненты единицы в соответствующих группах.

Отображение $\exp$: $V(M)\to D_0(M)$ ($\exp(v)=g(1)$, где $g(t)$ — поток поля v) является естественным аналогом экспоненциального отображения групп Ли. Пример, приведенный Омори в ([4]), показывает, что для групп диффеоморфизмов отображение $\exp$ не является локально-сюрьективным. Однако верна следующая теорема.

Теорема 1. *Если $H=D_0(M)$ или одна из ее подгрупп $B_0(N)$, $H_0^k(P)$, то H порождается, как топологическая группа, подмножеством* $\exp(\mathfrak{h}(H))$.

Идея доказательства этой теоремы состоит в следующем. Фиксируем на M некоторую риманову метрику, пусть Exp_x: $T_xM\to M$ — экспоненциальное отображение этой метрики. Обозначим через E отображение, заданное формулой $E(v)(x)=\mathrm{Exp}_xv(x)$, $v\in V(M)$, $x\in M$ (оно было введено Лесли в ([2])). Известно, что E гомеоморфно отображает некоторую окрестность нуля $U\subset V(M)$ на окрестность единицы в $D_0(M)$. В достаточно малой окрестности единицы $O\subset D_0(M)$ для произвольного диффеоморфизма $f\in O$ можно ввести векторные поля $v_k^n=E^{-1}\left(E\left(\dfrac{k}{n}E^{-1}f\right)\left(E\left(\dfrac{k-1}{n}E^{-1}f\right)\right)^{-1}\right)$. При помощи довольно сложных оценок доказывается, что $f_n=\exp v_n^n \exp v_{n-1}^n \dots \exp v_1^n\xrightarrow{C^\infty}f$, $n\to\infty$, откуда следует теорема.

Автору неизвестно, справедливо ли утверждение, аналогичное теореме 1, для произвольной связной замкнутой подгруппы в D_0M (или хотя бы для подгруппы, являющейся подгруппой Фреше).

Сопоставляя теорему 1 и теорему 2 из ([3]), получаем

Следствие 1. *Предположим, что M — однородное пространство компактной группы Ли.*

Тогда, если $N \lhd D_0(M)$ — замкнутый нормальный делитель такой, что его алгебра Ли $n \neq \{0\}$, то $N = D_0(M)$.

В последующих пунктах M также является однородным пространством некоторой связной компактной группы Ли G.

2. Предположим, что на M задано однородное векторное расслоение (E, p, M) над полем $k=R$ или $\mathbf{C}$. Обозначим через Γ_k, $k=0, 1, \ldots, \infty$, пространство C^k-сечений этого расслоения с топологией C^k. Пусть $M^{\mathbf{C}}$ — комплексная оболочка M (см. ([6])). Через Γ_h обозначим пространство голоморфных сечений для голоморфного расслоения $E^{\mathbf{C}}$ на $M^{\mathbf{C}}$, получаемого естественным продолжением расслоения E (при $k=\mathbf{C}$) или комплексификации E (или $k=R$). Введем в Γ_h топологию H равномерной сходимости на компактах.

Естественное действие группы G в пространствах Γ_τ, $\tau=0, 1, \ldots, \infty, h$, превращает их в топологические G-модули в смысле ([7]). Сечение $s \in \Gamma_0$ называется сферическим, если подпространство, натянутое сечениями gs, $g \in G$, конечномерно. Известно, что сферические сечения однозначно продолжаются до голоморфных сечений на $M^{\mathbf{C}}$ (см. ([5])). Обозначим пространство сферических сечений через S и положим $S^{\mathbf{C}} = S + iS$ при $k=R$ и $S^{\mathbf{C}} = S$ при $k=\mathbf{C}$. Из результатов работы [7] следует, что $\Gamma_k = (\bar{S})_{C^k}$, $\Gamma_h = (\bar{S}^{\mathbf{C}})_H$.

Введем следующую характеристику расслоения E. Для простого конечномерного G-модуля P над $\mathbf{C}$ обозначим $k(P) = \dim \operatorname{Hom}_G(P, S^{\mathbf{C}})$ и положим $\alpha(E) = \max\limits_P \left| \left[-\dfrac{k(P)}{\dim P} \right] \right|$. Из теоремы двойственности Фробениуса (см. ([9])) следует, что $\alpha(E) \leqslant \dim E_0$, где E_0 — слой над $0 \in M$.

Теорема 2. *Топологические G-модули Γ_τ, $\tau=0, 1, \ldots, \infty, h$, являются нётеровыми. Именно, если $N \subset \Gamma_\tau$ — замкнутый подмодуль, то существует всюду плотное подмножество $Q \subset N^{\alpha(E)}$, состоящее из аналитических сечений, такое, что любой набор сечений $(u_1, \ldots, u_{\alpha(E)})$ из Q порождает N как топологический G-модуль.*

Доказательство этой теоремы основано на применении теоремы двойственности Фробениуса, а также того, что $N = \overline{(N \cap S^{\mathbf{C}})}$ (см. ([7])). Кроме того, используется, что для любого простого конечномерного G-модуля P над $\mathbf{C}$ G-модуль $\underbrace{P \oplus P \oplus \ldots \oplus P}_{\dim P}$ цикличен.

Заметим, что если $\alpha(E) = 1$, то любой G-подмодуль $N \subset \Gamma_\tau$ цикличен (как топологический G-модуль), причем почти любой элемент $n \in N$ является образующим (т. е. такие n всюду плотны в N).

Приведем примеры расслоений E в $\alpha(E) = 1$.

Пример 1. $E = M \times k$, $k=R$, $\mathbf{C}$; Γ_k в этом случае — пространство k-значных функций класса C^k на M, $k=0, 1, \ldots, \infty$, а Γ_h — пространство голоморфных функций на $M^{\mathbf{C}}$.

Пример 2. $E = T(M)$ — касательное расслоение, а M — одно из следующих многообразий:

а) M — неприводимое компактное симметрическое пространство, G — группа его движений.

б) $M = U$ — компактная группа Ли, алгебра Ли которой $\mathfrak{u} = \sum\limits_i \mathfrak{u}_i^{l_i} + \mathfrak{t}$ (здесь $\mathfrak{t}$ — центр, $\mathfrak{u}_i$ — простые неизоморфные идеалы) удовлетворяет условию: $\dim \mathfrak{t} \leqslant 1$, $l_i \leqslant \dim \mathfrak{u}_i$. $G = U \times U$ — группа двухсторонних сдвигов на U.

В этом примере Γ_k — пространство векторных полей класса C^k на M, а Γ_h — пространство голоморфных векторных полей на $M^{\mathbf{C}}$.

3. Теоремы 1 и 2 позволяют доказать, что группа $D_0(M)$ и некоторые ее замкнутые подгруппы конечно-порождены (как топологические группы). Действие группы G на M определяет гомоморфизмы i: $G \to D_0(M)$ и j: $\mathfrak{G} \to V(M)$ (здесь $\mathfrak{G}$ — алгебра Ли группы G). Для произвольного под-

множества $V\subset V(M)$ обозначим через $\mathfrak{h}(\mathfrak{G}, V)$ замкнутую подалгебру в $V(M)$, порожденную множествами V и $j(\mathfrak{G})$, а через $H(G, V)$ — замкнутую подгруппу в $D(M)$, порожденную потоками векторных полей из V и элементами $i(G)$. Несложно проверить, что если V состоит из аналитических полей, то $\mathfrak{h}(\mathfrak{G}, V)$ является G-подмодулем в $V(M)$. Заметим, что $D_0(M)=H(G, V(M))$, $V(M)=\mathfrak{h}(\mathfrak{G}, S(TM))$. Обозначим $\alpha=\alpha(TM)$.

Теорема 3. 1) *Группа $D_0(M)$ и ее подгруппы вида $H(G, V)$ порождаются (как топологические группы) $2(\alpha+1)$ диффеоморфизмами.*

2) *Если $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли $V(M)$ или одна из ее подалгебр вида $\mathfrak{h}(\mathfrak{G}, V)$, (где V состоит из аналитических полей), то существует всюду плотное подмножество $P\subset\mathfrak{h}^\alpha$, состоящее из аналитических векторных полей, такое, что любой набор $(u_1, \ldots, u_\alpha)\in P$ вместе с элементами из $j(\mathfrak{G})$ порождает $\mathfrak{h}$ как топологическую алгебру.*

Доказательство этой теоремы опирается на теорему 2 (в случае, когда $E=TM$), на то, что связная компактная группа Ли порождается, как топологическая группа, двумя элементами (см. [8]) и на аналогичное свойство группы R. Заметим, что образующие в группе $D_0(M)$ и ее подгруппах $H(G, V)$ можно выбрать аналитичными.

Следствие 2. *Если M — однородное пространство из примера 2 п. 2, то в топологической группе $D_0(M)$ и ее подгруппах вида $H(G, V)$ существуют системы образующих, состоящие из четырех диффеоморфизмов.*

4. В некоторых случаях мы можем указать явный вид системы образующих в топологической группе $D_0(M)$.

а) $M=S^n$ — n-мерная, $n\geqslant 2$, сфера, заданная в R^{n+1} уравнением $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2=1$. На S^n имеются естественные действия групп $SO(1, n+1)$ и $SL(n+1)$. Используя результаты работ [1, 3], можно доказать, что подгруппы, соответствующие этим действиям, порождают топологическую группу $D_0(S^n)$. С другой стороны, диффеоморфизмы $f_n=\exp u_n$ (где

$$u_n(x_1, \ldots, x_{n+1})=\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} (2^{1/n})^k\,(0, \ldots, 0, -x_{2k}^{2k-1}, x_{2k-1}^{2k}, 0, \ldots, 0)\in V(S^n))$$

и $g_n(x_1, \ldots, x_{n+1})=(^1/_4x_{n+1}, 2x_1, 2x_2, x_3, \ldots, x_n)/(^1/_{16}x_{n+1}^2+4x_1^2+4x_2^2+ +x_3^2+\ldots+x_n^2)^{1/2}$, порождают подгруппу $SL(n+1)\subset D_0(S^n)$. Отсюда нетрудно вывести, что $\forall\varphi_n\in(SO(1, n+1)\setminus SO(n+1))$ диффеоморфизмы f_n, g_n, φ_n порождают $D_0(S^n)$ как топологическую группу. Заметим также, что в $D(S^n)$ можно построить систему образующих, состоящую из $|\pi_0(D(S^n))|+2$ диффеоморфизмов, причем известно, что $|\pi_0(D(S^n))|<\infty$ при $n\neq 4$.

Рассмотрим далее подгруппу $\tilde{O}(1, n+1)$ в $O(1, n+1)$, порожденную $O(n+1)$ и $SO(1, n+1)$; она естественно действует на S^n. Используя технику теории представлений, можно доказать, что единственным собственным замкнутым подмодулем $\tilde{O}(1, n+1)$-модуля $V(S^n)$ является подалгебра $so(1, n+1)$. Кроме того нормализатор подгруппы $\tilde{O}(1, n+1)$ в $D(S^n)$ совпадает с $\tilde{O}(1, n+1)$. Из этих фактов, в свою очередь, вытекает, что при $n=1, 2, 3$ подгруппа $\tilde{O}(1, n+1)$ является максимальной среди собственных замкнутых подгрупп $D(S^n)$. А при $n\geqslant 4$ аналогичным свойством обладает подгруппа $SO(1, n+1)$ в $D_0(S^n)$. В частности, при $n=1, 2, 3$ подгруппа $\tilde{O}(1, n+1)$ и произвольный диффеоморфизм $f\in(D(S^n)\setminus\tilde{O}(1, n+1))$ порождают топологическую группу $D(S^n)$. При $n\geqslant 4$ подгруппа $SO(1, n+1)$ и произвольный диффеоморфизм $g\in(D_0(S^n)\setminus SO(1, n+1))$ порождают топологическую группу $D_0(S^n)$.

б) $M=RP^n$, $n\geqslant 2$,— вещественное проективное пространство. Пусть π: $S^n\to RP^n$ — естественное накрытие. Введем векторные поля $v_n(x_1, \ldots, x_{n+1})= =x_3^2(-x_2, x_1, 0, \ldots, 0)\in V(S^n)$. Нетрудно проверить, что определены векторные поля $\pi_*(v_n)\in V(RP^n)$ и что диффеоморфизмы f_n, $g_n\in D_0(S^n)$ индуцируют диффеоморфизмы $\tilde{f}_n$, $\tilde{g}_n\in D_0(RP^n)$. Топологическая группа $D_0(RP^n)$ при $n\geqslant 2$ порождается тремя диффеоморфизмами $\tilde{f}_n$, $\tilde{g}_n$ и $\psi_n=\exp(\pi_*v_n)$.

в) $M=T^n$ — n-мерный тор. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — координаты на T^n (φ_j берутся по модулю 2π). Введем векторные поля $e_i=\partial/\partial\varphi_i\in V(T^n)$, $u_n=(\cos\varphi_1+\cos\varphi_n)(e_1+\ldots+e_n)$, $w_n=\cos\varphi_1 e_1+\ldots+\cos\varphi_n e_n$. Диффеоморфизма $\alpha_n=\exp u_n$, $\beta_n=\exp w_n$, $\gamma_n=\exp(\sum_{k=1}^{n} 2^{1/n})^k e^k$ порождают топологическую группу $D_0(T^n)$ при $n\geqslant 2$. А при $n=1$ топологическая группа $D(T^1)$ порождается двумя диффеоморфизмами $f(\varphi_1)=1-\varphi_1$, $g=\exp((2+\cos\varphi_1+\cos 2\varphi_1)e_1)$.

Автор выражает глубокую благодарность А. Л. Онищику за помощь и внимание к работе. Автор признателен А. Т. Фоменко за полезные указания.

Примечание при корректуре. В условиях теоремы 1 в качестве подгруппы H можно также брать связные компоненты единицы в подгруппах C^∞-автоморфизмов следующих G-структур на M: а) G-структуры, определяемой гладким элементом объема на ориентированном M; б) симплектической структуры; в) G-структуры, для которой алгебра Ли группы G замкнута относительно матричного произведения. Недавно Thurston анонсировал теорему о простоте группы D_0M ([10]). Из этого вытекает утверждение теоремы 1 для случая, когда $H=D_0(M)$, и следствие 1.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
6 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. А. Кириллов,* ДАН, т. 116, № 4, 538 (1957). [2] *I. A. Leslie,* Topology, v. 6, N 2, 263 (1967). [3] *А. М. Лукацкий,* Функц. анал., т. 8, в. 2, 87 (1974). [4] *H. Omori,* Proc. Symp in Pure Math. A.M.S., v. 15, 1970, p. 167. [5] *А. Л. Онищик,* УМН, т. 24, № 3, 231 (1969). [6] *А. Л. Онищик,* ДАН, т. 130, № 4, 726 (1960). [7] *S. Palais, T. E. Stewart,* Am. J. Math., v. 83, № 4, 623 (1961). [8] *S. Ulam, I. Shreier,* Fund. Math., v. 24, 302 (1935). [9] *Г. И. Ольшанский,* Функц. анал., т. 3, в. 4, 49 (1969). [10] *W. Thurston,* Bull. Am. Math. Soc., v. 80, № 2, 304 (1974).