Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 2

УДК 517.9+550.34 *МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА*

А. Г. МЕГРАБОВ

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ПОЛУПЛОСКОСТИ И ПОЛОСЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ПЛОСКИХ ВОЛН НА НЕОДНОРОДНЫХ СЛОЯХ

(Представлено академиком Г. И. Марчуком 20 VI 1974)

Теория обратных задач об определении коэффициентов в эллиптических уравнениях развита гораздо слабее по сравнению с гиперболическими уравнениями. Единственный известный результат получен в [5] и формулируется так. Обозначим через $G(\lambda, P, Q)$ функцию Грина первого рода уравнения $\Delta v=(a^2+\lambda b(P))v$ $((a^2+\lambda b(P))\geqslant 0,\ P=(z, \xi),\ a^2=\mathrm{const})$ в полуплоскости $z>0$, причем $b(P)\equiv 0$ при $z<z_1=\mathrm{const}>0$; здесь λ — параметр, b — ограниченная непрерывная функция. Обратная задача об определении коэффициента $b(P)$ по функции

$$f(\xi, \xi_0)=\frac{\partial}{\partial\lambda}G(\lambda, P, Q),$$

заданной при $\lambda=0$, $-\infty<\xi,\ \xi_0<\infty$ на некоторой прямой $z=\mathrm{const}$, может иметь в классе абсолютно интегрируемых функций не более одного решения.

Таким образом, данные обратной задачи носят многомерный характер. Однако и обратная задача многомерна: $b=b(z, \xi)$ (см. также [7]).

Вместе с тем до сих пор отсутствовали какие-либо результаты по обратным задачам об определении коэффициентов в эллиптическом уравнении, пусть даже одномерном, но в которых в качестве данных задавалось бы непосредственно само решение краевой задачи на границе области как функция только точек границы. Другими словами, не рассматривались обратные задачи для эллиптических уравнений, аналогичные по характеру данных известным обратным задачам для гиперболического уравнения колебаний струны [1, 4, 7]. Данная заметка имеет целью получить некоторые результаты в этом направлении.

Краевая (прямая) задача 1. Найти функцию $u(z, \xi)$, удовлетворяющую в области $z>0$, $-\infty<\xi<\infty$ уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\eta(z)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\tau(z)\frac{\partial u}{\partial z}=0,\quad 0<m<\eta(z)<M<\infty, \tag{1}$$

при $z=0$, $-\infty<\xi<\infty$ — граничному условию наклонной производной

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\varkappa\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)\Bigg|_{z=0}=f(\xi),\quad -\infty<\xi<\infty, \tag{2}$$

и условиям: при $z\to\infty$ или $|\xi|\to\infty$ $u(z, \xi)\to 0$ равномерно относительно $\xi\in(-\infty, \infty)$ и $z\in[0, \infty)$ соответственно; функции u, u_z, u_ξ непрерывны при $z\geqslant 0$, $-\infty<\xi<\infty$, а производные второго порядка — при $z>0$, $-\infty<\xi<\infty$. Коэффициенты уравнения (1) ограничены при $0\leqslant z<\infty$.

Краевая (прямая) задача 2. Найти функцию $u(z, \xi)$, удовлетворяющую в области $0<z<H(<\infty)$, $-\infty<\xi<\infty$ уравнению (1), при $z=0$, $-\infty<\xi<\infty$ — условию (2), при $z=H$, $-\infty<\xi<\infty$ — условию

$\partial u/\partial z|_{z=H}=0$ и условиям: при $|\xi|\to\infty$ $u(z, \xi)\to 0$ равномерно относительно $z\in[0, H]$; функции u, u_z, u_ξ непрерывны при $0\leqslant z\leqslant H$, $-\infty<\xi<\infty$, а производные второго порядка — при $0<z<H$, $-\infty<\xi<\infty$. Коэффициенты уравнения (1) ограничены при $0\leqslant z\leqslant H$.

Решение краевых задач 1 и 2 существует при условиях теорем, приводимых ниже, и единственно в силу принципов экстремума Хопфа и Заремба — Жиро.

Положим

$$\tau(z)=\frac{d}{dz}\{\ln\mu(z)\},\ \mu(0)=1,\quad \eta(z)=1/\overset{+}{v}{}^2(z),$$

$$\sigma(z)=\overset{+}{v}(z)/\mu(z),\quad f(\xi)=\frac{d\varphi}{d\xi},\quad \varphi(0)=0,$$

где функции μ и $\overset{+}{v}$ положительны, и перейдем к переменным

$$x=\int_0^z\frac{dz}{\overset{+}{v}(z)},\quad \sigma(x)=\sigma(z).$$

Обратная задача 1. При $-\infty<\xi<\infty$ заданы значения $u(0, \xi)$ и $\partial u/\partial z|_{z=0}$ решения $u(z, \xi)$ прямой задачи 1 с неизвестным числом $\varkappa$ и неизвестными функциями $\eta(z)$, $\tau(z)$, $0\leqslant z<\infty$, $f(\xi)$, $-\infty<\xi<\infty$. Требуется определить: в общем случае — функцию $\sigma(x)$ при $0\leqslant x<\infty$; если $\tau(z)\equiv 0$, то функцию $\eta(z)$ при $0\leqslant z<\infty$; если $\eta(z)$ известна при $0\leqslant z<\infty$, то функцию $\tau(z)$ при $0\leqslant z<\infty$.

Теорема 1. *Обозначим*

$$B(x)=-\frac{1}{2\sigma}\frac{d\sigma}{dx},\quad g(x)=\frac{dB}{dx}+B^2.$$

Пусть производные $d^2\eta/dz^2$ и $d\tau/dz$ непрерывны при $0\leqslant z<\infty$;

$$\int_0^\infty x|g|dx<\infty,\quad \int_0^\infty B^2\,dx<\infty,\quad \int_0^\infty|B|dx<\infty;$$

функция $\varphi(\xi)$ и ее производные вплоть до 4-го порядка непрерывны и абсолютно интегрируемы на прямой $-\infty<\xi<\infty$; $\varphi(k)|_{k=0}=0$, где $\varphi(k)$ — преобразование Фурье функции $\varphi(\xi)$.

Тогда обратная задача 1 имеет единственное решение при любом вещественном $\varkappa$.

Обратные задачи 2 и 3. При $-\infty<\xi<\infty$ заданы: в обратной задаче — функция $f(\xi)$ и значения $u(H, \xi)$ решения $u(z, \xi)$ прямой задачи 2 с неизвестным числом H и неизвестными функциями $\eta(z)$, $\tau(z)$, $0\leqslant z\leqslant H$, задано также одно из чисел $\varkappa$, $\sigma(0)$, $\sigma(H)$ (а два другие неизвестны); в обратной задаче 3 — значения $u(0, \xi)$ и $\partial u/\partial z|_{z=0}$ решения прямой задачи 2 с неизвестными числами H, $\varkappa$ и неизвестными функциями $\eta(z)$, $\tau(z)$, $0\leqslant z\leqslant H$, $f(\xi)$, $-\infty<\xi<\infty$. В обеих задачах требуется определить: в общем случае — число $x_H=x(H)$ и функцию $\sigma(x)$ при $0\leqslant x\leqslant x_H$; если $\tau(z)\equiv 0$, то число H и функцию $\eta(z)$ при $0\leqslant z\leqslant H$; если $\eta(z)$ известна при $0\leqslant z\leqslant H$, то число H и функцию $\tau(z)$ при $0\leqslant z\leqslant H$. В обратной задаче 2 подлежит определению также число $\varkappa$, если оно не задано.

Теорема 2. *Пусть производные $d^2\eta/dz^2$ и $d\tau/dz$ непрерывны при $0\leqslant z\leqslant H$; $d\sigma(z)/dz|_{z=H}=0$; выполнено третье условие теоремы 1.*

Тогда обратные задачи 2 и 3 имеют единственное решение соответственно при любом $\varkappa\neq 0$ и любом вещественном $\varkappa$.

Метод доказательства теорем единственности и решения всех обратных задач заключается в приведении их к известным обратным задачам для самосопряженного оператора Штурма — Лиувилля, несмотря на то, что соответствующий одномерный оператор не является самосопряженным и не является оператором Штурма — Лиувилля. Именно, все обратные задачи в полуплоскости удается привести к задаче определения оператора Штурма — Лиувилля на полуоси по главной переходной ([4]) или спектральной ([3], [6]) функции, и все задачи в полосе — к задаче определения регулярного оператора Штурма — Лиувилля по двум спектрам ([2], [6]). Такой прием основан на использовании найденной специальной формы решения краевых задач 1 и 2.

К данным обратным задачам приводят задачи определения свойств неоднородного упругого полупространства (в частном случае, переходного слоя) или слоя толщины H со свободной границей, возбуждаемого плоской волной SH, в случае $v(z)>v_0/\sin\theta_0$. При этом

$$\eta(z)=[\sin^2\theta_0/v_0^2-v^2(z)],\quad \varkappa=\cos\theta_0\mu_0/(v_0\mu(0)),$$
$$\varphi(\xi)=-2\varkappa\varphi_0(\xi).$$

Здесь $v(z)$ и $\mu(z)$ — скорость распространения волн и модуль сдвига в неоднородном слое, v_0 и μ_0 — в однородном полупространстве, откуда под углом $\theta_0\in(0, \pi/2)$ падает плоская волна формы $\varphi_0(\xi)$, $u(z, \xi)$ — полное поле смещений в слое, причем $u(0, \xi)=\varphi_0(\xi)+\varphi_1(\xi)$, где $\varphi_1(\xi)$ — форма отраженной от слоя плоской волны. Обратные задачи 1—3 соответствуют задачам определения свойств неоднородного слоя по (1) формам падающей и отраженной волн или (2) колебаниям фиксированной точки свободной границы и форме падающей волны, заданным для одного значения θ_0.

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
11 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. С. Благовещенский*, Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 115, 28 (1972). [2] *М. Г. Гасымов, Б. М. Левитан*, УМН, т. 19, в. 2, 3 (1964). [3] *И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 15, 309 (1951). [4] *М. Г. Крейн*, ДАН, т. 94, № 6, 767 (1954). [5] *М. М. Лаврентьев, В. Г. Васильев, В. Г. Романов*, Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений, Новосибирск, 1969. [6] *В. А. Марченко*, Тр. Московск. матем. об-ва, т. 1, 327 (1952). [7] *В. Г. Романов*, Обратные задачи для дифференциальных уравнений, Новосибирск, 1973.