Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 2

УДК 517.947.44

МАТЕМАТИКА

Л. А. МУРАВЕЙ

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ ВРЕМЕНИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ВНЕШНЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 20 VI 1974)

Пусть Ω — неограниченная область плоскости E_2, границей которой является замкнутая дважды гладкая кривая Γ, и пусть $u(t, x)$ решение следующей задачи *:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}=\Delta u(t,x), \quad t>0, \quad x\in\Omega, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0}=f_0(x), \quad u(t,x)|_{t=0}=f_1(x), \quad x\in\overline{\Omega}, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial n}+g(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{x\in\Gamma}=0, \quad t\geqslant 0, \tag{3}$$

где $x=(x_1, x_2)$, $\Delta=\partial^2/\partial x_1^2+\partial^2/\partial x_2^2$ и n — вектор внешней по отношению к Ω единичной нормали к контуру Γ.

Контур Γ предполагается строго выпуклым, функция $g(x)$ неотрицательной непрерывно дифференцируемой на Γ; относительно начальных функций будем предполагать, что $f_0(x)\in C^1(\overline{\Omega})$, $f_1(x)\in C^2(\overline{\Omega})$, функции $f_0(x)$ и $f_1(x)$ имеют ограниченные носители и обращаются в нуль на Γ вместе со своими производными до первого и второго порядков соответственно.

Работа посвящена исследованию асимптотического поведения при больших значениях t решения $u(t, x)$ и функции Грина $U(t, x; y)$ задачи (1)–(3).

Фундаментальное решение уравнения (1) будем обозначать через $V(t, x; y)$, т. е.

$$V(t,x;y)=\frac{1}{2\pi}\frac{\theta(t-|x-y|)}{(t^2-|x-y|^2)^{1/2}},$$

где

$$\theta(\tau)=\begin{cases}1, & \tau>0,\\ 0, & \tau\leqslant 0.\end{cases}$$

Через Ω_R обозначим область $\Omega\cap\{|x|<R\}$, где $R\geqslant R'>0$ и R' таково, что $\Gamma\subset\{|x|\leqslant R\}$.

Пусть $T_0>T'=2R'$ и $R_0\in(0, T-R')$, через Ω_{t-R_0}, $t\geqslant T_0$, будем обозначать область $\Omega\cap\{|x|<t-R_0\}$, а через K_{T_0,R_0} — область $\{(t, x): T_0<t, x\in\Omega_{t-R_0}\}$.

Теорема 1. *Для любого $R\geqslant R'$ существуют такие положительные числа T_0 и $R_0(T_0>T', R_0\in(0, T_0-R'))$, что $U(t, x; y)\in C^\infty(K_{T_0,R_0}\times\Omega_R)$ и при любом $l=0, 1, \ldots$ $\partial^l U(t, x; y)/\partial t^l\in C(\overline{K}_{T_0,R_0}\times\Omega_R)$. При этом для всех $(t, x)\in\overline{K}_{T_0,R_0}$ и $y\in Q$, Q — произвольный компакт из Ω_R, имеют место оценки*

$$\left|\frac{\partial^l}{\partial t^l}(U(t,x;y)-V(t,x;y))\right|\leqslant C\frac{\ln(t-|x|)}{t^{1/2}(t-|x|)^{3/2+l}}.$$

* Существование решения доказывается методом Галёркина.

Здесь положительные постоянные T_0 и R_0 зависят от R, Γ, $\|g\|_{C(\Gamma)}$, а положительная постоянная C — от l, R, $\operatorname{dist}(\Gamma, Q)$, Γ и $\|g\|_{C(\Gamma)}$.

Теорема 2. *Для любого $R \geqslant R'$, любых целых неотрицательных чисел N и l и произвольного компакта Q из Ω_R существует такое положительное число T, что при всех $y \in Q$, $x \in \overline{\Omega}_R$ и $t \geqslant T$ имеют место равенства*

$$\frac{\partial^l U(t, x; y)}{\partial t^l} = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{n} U_{m,n}(x, y) \frac{\partial^l}{\partial t^l} \left(\frac{\ln^m t}{t^{n+1}} \right) + \tilde{U}_N{}^l(t, x; y),$$

где функции $U_{m,n}(x, y) = U_{m,n}(y, x)$, $m=0, \ldots, n$, $n=0, 1, \ldots$, принадлежат $C^\infty(\Omega \times \Omega) \cap C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ и для функции $\tilde{U}_N{}^l$ справедлива оценка

$$|\tilde{U}_N{}^l(t, x; y)| \leqslant C \frac{\ln^{N+1} t}{t^{N+2+l}};$$

при этом положительные постоянные T и C зависят от N, l, R, $\operatorname{dist}(\Gamma, Q)$, Γ и $\|g\|_{C(\Gamma)}$.

В частности, функции $\partial^l U(t, x; y)/\partial t^l$, $l=0, 1, \ldots$, можно представить в виде

$$\frac{\partial^l U(t, x; y)}{\partial t^l} = \frac{\partial^l}{\partial t^l} \left\{ \frac{1}{2\pi t} + \frac{\ln t}{2\pi^2 t^2} \int_\Gamma g(x')\, ds_{x'} + \right.$$

$$+ \frac{1}{\pi t^2} \int_\Gamma g(x') \cdot \left(G_0(x', x) + G_0(x', y) + \frac{1 - \ln 2}{\pi} \right) ds_{x'} +$$

$$+ \frac{3}{4} \frac{\ln^2 t}{\pi^3 t^3} \left(\int_\Gamma g(x')\, ds_{x'} \right)^2 - \frac{\ln t}{2\pi^2 t^3} \left[\operatorname{mes}(E_2 \setminus \Omega) + \right.$$

$$+ \int_\Gamma \int_\Gamma g(x') g(x'') \left(G_0(x'', x) + G_0(x'', y) + \right.$$

$$\left.\left. \left. + 2G_0(x'', x') - \frac{3(3 - \ln 2)}{2\pi} \right) ds_{x'}\, ds_{x''} \right] \right\} + \tilde{U}^l(t, x; y),$$

где функция $\tilde{U}^l(t, x; y)$ при $y \in Q$, $x \in \overline{\Omega}_R$ и $t \geqslant T$ удовлетворяет неравенству $|\tilde{U}^l(t, x; y)| < C/t^{3+l}$.

Здесь

$$G_0(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln|x - y| + \tilde{G}_0(x, y),$$

где функция $\tilde{G}_0(x, y) = \tilde{G}_0(y, x)$ принадлежит $C^\infty(\Omega \times \Omega) \cap C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$, является гармонической по каждому переменному в Ω и удовлетворяет условиям: при любом $y \in \overline{\Omega}$

$$\lim_{|x| \to \infty} \tilde{G}_0(x, y) = 0,$$

а при любом $y \in \Omega$

$$\left. \frac{\partial \tilde{G}_0(x, y)}{\partial n} \right|_{x \in \Gamma} = \left. \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{2\pi} \ln|x - y| \right) \right|_{x \in \Gamma}.$$

Рассмотрим теперь решение $u(t, x)$ задачи (1) — (3). Будем предполагать, что носители функции $f_0(x)$ и $f_1(x)$ принадлежат $\overline{\Omega}_R$ при $R \geqslant R'$ (заметим, что мы не требуем финитности в Ω функций f_0 и f_1).

Функцию $u(t, x)$ представим в виде $u = u_0 + u_1$, где $u_0(t, x)$ и $u_1(t, x)$ — решения уравнения (1), удовлетворяющие условию (3) и начальным условиям

$$u_0|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_0}{\partial t} \right|_{t=0} = f_0; \quad u_1|_{t=0} = f_1, \quad \left. \frac{\partial u_1}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

Через $v(t, x)$ обозначим решение задачи Коши для уравнения (1) с продолженными нулем на $E_2\setminus\bar{\Omega}$ начальными функциями f_0 и f_1. Аналогично представим функцию v в виде $v=v_0+v_1$.

Теорема 3. *Существуют положительные числа T_0 и R_0 такие, что* $u_\alpha(t, x)\in C^\infty(K_{T_0, R_0})$ *и*

$$\partial^l u_\alpha(t, x)/\partial t^l\in C(\bar{K}_{T_0, R_0}),\quad \alpha=0,\ 1,$$

при любом $l=0, 1, \ldots$ *При этом имеют место оценки*

$$\left|\frac{\partial^l}{\partial t^l}(u_\alpha(t,x)-v_\alpha(t,x))\right|\leqslant C_0\frac{\ln(t-|x|)}{t^{1/2}(t-|x|)^{3/2+\alpha+l}}.$$

Если дополнительно $\Gamma\in C^{3+l}$ *и* $f_\alpha\in C^{2+\alpha+l}(\bar{\Omega})$, $\alpha=0, 1$, $l=0, 1,\ldots$, *и на* Γ *функции* f_α, $\alpha=0, 1$, *обращаются в нуль вместе со своими производными до порядка* $2+\alpha+l$, *то существует положительное число* T_1 *такое, что*

$$\partial^l u_\alpha(t, x)/\partial t^l\in C(\bar{\Omega}\times[T_1\leqslant t<\infty))$$

и имеют место оценки

$$\left|\frac{\partial^l}{\partial t^l}(u_\alpha(t,x)-v_\alpha(t,x))\right|\leqslant C_1\frac{\ln(2+|t-|x||)}{t^{1/2}(1+|t-|x||)^{3/2+\alpha+l}}\theta(t+R).$$

Здесь положительные постоянные T_0 и C_0 зависят от l, R, $\|f_\alpha\|_{C(\bar{\Omega})}$, $\alpha=0, 1$, Γ и $\|g\|_{C(\Gamma)}$, а положительные постоянные T_1 и C_1 — от l, R, $\|f_\alpha\|_{C^{2+\alpha+l}(\bar{\Omega})}$, $\alpha=0, 1$, Γ и $\|g\|_{C(\Gamma)}$.

Теорема 4. *Для любого $R\geqslant R'$ и любых целых неотрицательных чисел N и l существует положительное число T такое, что при всех $x\in\bar{\Omega}_R$ и $t\geqslant T$ имеют место равенства*

$$\frac{\partial^l u_\alpha(t,x)}{\partial t^l}=\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{n}u_{m,n,\alpha}(x)\frac{\partial^{l+\alpha}}{\partial t^{l+\alpha}}\left(\frac{\ln^m t}{t^{n+1}}\right)+\tilde{u}^{\,l}_{N,\alpha}(t,x),$$

где

$$u_{m,n,\alpha}(x)=\int_\Omega U_{m,n}(x,y)f_\alpha(y)\,dy,$$

$m=0,\ldots,n$, $n=0, 1,\ldots$, $\alpha=0, 1$, *и для функций* $\tilde{u}^{l}_{N,\alpha}$ *справедлива оценка*

$$|\tilde{u}^{\,l}_{N,\alpha}(t,x)|\leqslant C\frac{\ln^{N+1+\alpha}t}{t^{N+2+\alpha+l}}.$$

При этом положительные постоянные T и C зависят от N, l, R, $\|f_\alpha\|_{C(\bar{\Omega})}$, $\alpha=0, 1$, Γ и $\|g\|_{C(\Gamma)}$.

Теоремы 1—4 доказываются методами работ ([1-6]), при этом существенно используются свойства функции Грина $G(x, y, k)$ следующей задачи для уравнения Гельмгольца:

$$\Delta v+k^2v=f(x),\qquad x\in\Omega,$$

$$\frac{\partial v}{\partial|x|}-ikv=e^{-\operatorname{Im}k|x|}o(|x|^{-1/2}),\qquad |x|\to\infty,\qquad \operatorname{Im}k\geqslant0,\qquad k\neq0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial n}-ikg(x)v|_\Gamma=0,$$

установленные в ([7]), а также в следующем утверждении.

Теорема 5. *Существует такое положительное число $b=b(\Gamma, \|g\|)_{C(\Gamma)}$, что функция $G(x, y, k)$ допускает аналитическое продолжение в область $K=\{-\pi/2<\arg k<3\pi/2\}\cap\{|k|<b\}$ рядом*

$$G(x,y,k)=$$
$$=G_0(x,y)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\ln k+\gamma\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n+1}G_{m,n}(x,y)k^n\left(\frac{1}{\pi}\ln k+\gamma\right)^m,\qquad (4)$$

где функции $G_{m,n}(x, y)$, $m=0, 1, \ldots, n+1$, $n=1, 2, \ldots$, *принадлежат* $C^\infty(\Omega\times\Omega)\cap C(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega})$ и $\gamma=-\dfrac{i}{2}+\dfrac{1}{\pi}(C-\ln 2)$, C — *постоянная Эйлера.*

Ряд (4) сходится абсолютно и равномерно по k из K и x и y из $\overline{\Omega}_R$, где R произвольно $(R\geqslant R')$.

Заметим, что в теореме 5 не предполагается выпуклость контура Γ и неотрицательность функции $g(x)$; теорема доказывается тем же методом, что и соответствующее утверждение в случае $g(x)\equiv 0$ ([3], [4], [6]).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
20 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. П. Михайлов*, ДАН, т. 159, 4, 756 (1964). [2] *Л. А. Муравей*, ДАН, т. 193, № 5, 996 (1970). [3] *Л. А. Муравей*, Дифференциальные уравнения, т. 6, № 12, 2248 (1970). [4] *Л. А. Муравей*, Применение функциональных методов к краевым задачам матем. физики, Матер. III Советско-Чехосл. совещ., май 1971 г., 1972, стр. 157. [5] *Л. А. Муравей*, ДАН, т. 204, № 4, 780 (1972). [6] *Л. А. Муравей*. Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 126, 73 (1973). [7] *Л. А. Муравей*, ДАН, 220, № 1 (1974).