Доклады Академии наук СССР
1975. Том 221, № 4

УДК 517.946 *МАТЕМАТИКА*

Член-корреспондент АН СССР М. М. ЛАВРЕНТЬЕВ, М. В. КЛИБАНОВ

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ I РОДА И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В настоящей заметке приведена теорема единственности решения одного интегрального уравнения I рода. С помощью этой теоремы исследован вопрос единственности решения обратной для параболического уравнения [1].

Пусть K — некоторое натуральное число, $f(g)$ и $g(y)$ — целые аналитические функции, разложения которых в степенные ряды имеют вид

$$f(y)=\sum_{j=0}^{\infty} f_j y^{Kj},$$

$$g(y)=\sum_{j=0}^{\infty} g_j y^{Kj}. \tag{1}$$

причем для всех $j=0, 1, 2, \ldots$

$$f_j>0, \quad g_i>0. \tag{2}$$

Пусть Π и Π_0 — две плоскости в n-мерном эвклидовом пространстве R^n, $n\geqslant 2$, такие, что

$$\Pi=\{x=(x_1, \ldots, x_n)\,|\,x_m=x_{m+1}=\ldots=x_n=0\},$$
$$\Pi_0=\{x_0=(x_{01}, \ldots, x_{0n})\,|\,x_{01}=x_{02}=\ldots=x_{0m}=0\}, \tag{3}$$

где $1\leqslant m\leqslant n$ — фиксированное натуральное число.

Рассмотрим интегральное уравнение I рода относительно неизвестной функции $\varphi(x)\in L_1(R^n)$:

$$\int_{R^n} f(\lambda|x-\xi|^{2/K})\cdot g(\lambda|x_0-\xi|^{2/K})\cdot\varphi(\xi)\,d\xi=h(\lambda, x, x_0). \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (1)—(3). *И пусть функция* $h(\lambda, x, x_0)$ *известна при всех* $\lambda>0$, $x\in\Pi$, $x_0\in\Pi_0$.

Тогда решение интегрального уравнения I *рода* (4) *единственно в классе непрерывных финитных функций* $\varphi(x)$, *четных по переменной* x_m.

Пусть функция $u(x, t, x_0, \alpha)$ является решением уравнения

$$u_t=\Delta u+\alpha a(x)\cdot u \tag{5}$$

с начальным условием

$$u|_{t=0}=\delta(x-x_0), \tag{6}$$

где $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $x_0=(x_{01}, \ldots, x_{0n})$ — n-мерные векторы

$$\Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

α — малый параметр, $\delta(x-x_0)$ — дельта-функция Дирака, сосредоточенная в точке x_0.

Для уравнения (5) с начальным условием (6) рассмотрим следующую обратную задачу.

Пусть функция $a(x)$ неизвестна, но при всех $x\in\Pi$, $x_0\in\Pi_0$, $t\geqslant 0$ известна функция

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}u(x,t,x_0,\alpha)\,|_{\alpha=0}=\psi(x,x_0,t). \tag{7}$$

Требуется по функции ψ определить функцию a.

Предположим, что число n четно, функция $a(x)$ непрерывна и финитна. Тогда обратную задачу (5)—(7) можно свести к решению интегрального уравнения I рода вида (4) относительно неизвестной функции $a(x)$. Таким образом, имеет место

Теорема 2. *Пусть число n четно.*

Тогда решение обратной задачи (5)—(7) *единственно в классе непрерывных финитных функций $a(x)$, четных по переменной x_m.*

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
10 XI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, В. Г. Васильев,* Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений, Новосибирск, 1969.