

УДК 517.948:519.3

КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

М. В. МЕЕРОВ, Я. М. БЕРЩАНСКИЙ

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ОДНОГО КЛАССА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

(Представлено академиком Б. Н. Петровым 21 XII 1973)

Теория математического программирования в бесконечномерных пространствах возникла в начале 50-х годов. В работах Л. Гурвица, Р. Даффина и др. была перенесена на случай линейных топологических пространств теория двойственности ^(1, 2). Однако эффективные вычислительные методы линейного программирования такие, как, например, симплекс-метод, не удалось применить к общей задаче оптимизации динамических линейных систем. В этом направлении достигнуты успехи лишь для отдельных классов задач. Здесь можно упомянуть работу Ю. П. Кривенкова ⁽³⁾.

Рассмотрим задачу максимизации функционала

$$J = \int_0^T c(t)x(t)dt \quad (1)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} A(t)x(t) + \int_0^t H(t, \tau)x(\tau)d\tau &\leq b(t), \\ x(t) &\geq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (2)$$

где $c(t)$, $b(t)$, $x(t)$ — n -мерные вектор-функции, $c(t)$, $b(t)$ заданы, $x(t)$ — неизвестное, $A(t)$, $H(t, \tau)$ — матричные функции размерности $n \times n$. Все функции времени рассматриваются как элементы пространства $L_2^n[0, T]$. Матрица $A(t)$ ограничена, ядро $H(t, \tau)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^T \int_0^t \|H(t, \tau)\|^2 d\tau dt < +\infty.$$

Неравенства в (2) понимаются как неравенства для каждой из компонент и должны выполняться почти везде на $[0, T]$.

Практические задачи такого вида, по-видимому, впервые рассматривал Р. Беллман ⁽⁴⁾. К виду (1), (2) приводится большой круг задач динамической оптимизации, возникающих в математической экономике ⁽⁵⁾, в системах с распределенными параметрами, описываемыми уравнениями математической физики ⁽⁶⁾, и в ряде других многосвязных систем. В работах ⁽⁷⁻⁹⁾ задача (1) — (2) решается путем разностной аппроксимации и исследуется сходимость последовательности решений конечномерных задач. Предлагаемые здесь методы решения задачи (1), (2) основаны на использовании специфических особенностей ограничений (2) и являются обобщением на случай динамических систем методов статической оптимизации линейных многосвязных систем, предложенных в работе ⁽¹⁰⁾. Дополнительно предполагается, что элементы главной диагонали матрицы $A(t)$ постоянны и положительны, остальные элементы $A(t)$ и все элементы $H(t, \tau)$ неположительны, компоненты вектора $b(t)$ неотрицательны.

Наиболее общий класс задач, который будет рассмотрен, записывается в виде

$$(c, x) \rightarrow \max \quad (3)$$

при условиях

$$x - Fx \leq b, \quad x \geq 0, \quad (4)$$

где c, b, x — функции из $L_2^n[0, T]$, F — линейный ограниченный оператор, отображающий пространство $L_2^n[0, T]$ в себя. Специфика условий (4) состоит в том, что $b \geq 0$ и оператор F положителен (т. е. если $x \geq 0$, то и $Fx \geq 0$; в этом случае пишем $F \geq 0$).

Для задачи (3), (4) (прямая задача) запишем двойственную задачу

$$(\psi, b) \rightarrow \min \quad (5)$$

при условиях

$$\psi - F'\psi \geq c, \quad \psi \geq 0, \quad (6)$$

где F' — сопряженный с F оператор.

Предлагаемые ниже вычислительные процедуры требуют для своей сходимости выполнения определенных условий корректности поставленных задач. Задачу (3), (4) будем называть корректной относительно вектора ограничений b и коэффициентов линейной формы c , если оптимальное значение функционала качества в ней конечно и сколь угодно мало меняется при любых достаточно малых изменениях b и c . Аналогично можно определить корректность задачи отдельно относительно b или c . Так же определяется корректность для задачи (5), (6).

Всюду в дальнейшем будем считать выполненным следующее

Условие А. Неравенства (6) совместны, т. е. существует удовлетворяющая им функция $\bar{\psi}$.

Теорема 1. Условие А необходимо и достаточно для корректности задачи (3), (4) относительно вектора b . Если это условие не выполняется, то линейная форма (3) становится неограниченной при определенных сколь угодно малых возмущениях b .

Теорема 2. Если условие А выполняется, то задача (5), (6) имеет оптимальное решение ψ^* , которое может быть найдено с помощью итерационной процедуры

$$\psi^0 = 0, \quad \psi^{k+1} = \max \{0, c + F'\psi^k\}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (7)$$

Сходимость итерационного процесса (7) монотонная, т. е. $0 \leq \psi^k \leq \psi^{k+1} \leq \psi^*$, и $\psi^k \rightarrow \psi^*$ по норме $L_2^n[0, T]$.

Если ψ — любая функция, удовлетворяющая условиям (6), то $\psi^* \leq \psi$, так что оптимальное решение не зависит от b (при том лишь условии, что $b \geq 0$).

Прежде чем перейти к решению задачи (3), (4), введем некоторые обозначения. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — набор n подмножеств промежутка $[0, T]$. Определим диагональную матрицу $P(t)$, у которой i -й элемент главной диагонали равен 1, если $t \in \alpha_i$, и равен 0, если $t \notin \alpha_i$, $i = 1, \dots, n$. Матрицу $P(t)$ будем называть характеристической матрицей набора множеств α .

Положим теперь $\alpha_i^* = \{t: \psi_i^*(t) > 0\}$, $i = 1, \dots, n$, и пусть $P^*(t)$ — характеристическая матрица набора множеств α^* .

Теорема 3. Оптимальное решение x^* задачи (3), (4), если оно существует, является решением уравнения $x = P^*(b + Fx)$ и может быть найдено при помощи итерационного процесса

$$x^0 = 0, \quad x^{k+1} = P^*(b + Fx^k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

или при помощи процесса

$$x^0 = 0, \quad x^{k+1} = P^k(b + Fx^k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где характеристические матрицы P^k соответствуют множествам $\alpha_i^k = \{t: \psi_i^k(t) > 0\}$, $i = 1, \dots, n$, а ψ^k — последовательность (7).

Если оптимальное значение функционала в задаче (3), (4) не достигается, то эти последовательности x^k могут не быть максимизирующими.

Для обоснования другой вычислительной процедуры решения задачи (3), (4) и (5), (6) предполагается, что выполняется более жесткое, чем условие А,

Условие Б. Существует такое положительное ε , что неравенства $\psi - F'\psi \geq \varepsilon$, $\psi \geq 0$ совместны, если только $\|c - \tilde{c}\| \leq \varepsilon$.

Теорема 4. Условие Б необходимо и достаточно для корректности задачи (3), (4) относительно b и c . При выполнении условия Б задача (3), (4) имеет оптимальное решение.

На начальной итерации вычислительного алгоритма полагаем $x^0(t) = 0$, $\psi^0(t) = 0$. Пусть на k -й итерации метода получен набор множеств $\alpha^k = (\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k)$, $P^k(t)$ — характеристическая матрица этого набора. Если $k=0$, в качестве $\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0$ берем пустые множества. Функции x^k , ψ^k находим из уравнений

$$x = P^k(b + Fx), \quad (8)$$

$$\psi = P^k(c + F'\psi). \quad (9)$$

После этого определяем новый набор множеств $\alpha_1^{k+1}, \dots, \alpha_n^{k+1}$ по формулам

$$\alpha_i^{k+1} = \alpha_i^k \cup \{t: \Delta_i^k(t) > 0\}; \quad i=1, \dots, n, \quad (10)$$

где обозначено $\Delta^k = c - \psi^k + F'\psi^k$.

Теорема 5. Вычислительная процедура (8) — (10) обладает следующими свойствами:

а) уравнения (8) и (9) имеют неотрицательные решения x^k и ψ^k соответственно;

б) операторы $I - P^k F$ и $I - P^k F'$ имеют положительные обратные операторы (I — единичный оператор);

в) линейная форма (3) не убывает, т. е. $(c, x^k) \leq (c, x^{k+1})$;

г) последовательности функций x^k и ψ^k — монотонно неубывают, т. е. $0 \leq x^k \leq x^{k+1}$ и $0 \leq \psi^k \leq \psi^{k+1}$, и сходятся по норме $L_2^n[0, T]$ к оптимальным решениям x^* и ψ^* соответственно;

д) если на k -м шаге алгоритма получено $\Delta^k \leq 0$, то функции x^k , ψ^k оптимальны.

Условие Б может быть ослаблено. Теорема 5 остается в силе, за исключением п. б), если известно, что оптимальное решение x^* существует (условие Б при этом может не выполняться). Если о существовании x^* ничего не известно, но в процессе решения задачи по методу (8) — (10) для всех $k=1, 2, \dots$ выполняется условие б), то теорема 5 верна с тем изменением, что x^k могут не сходиться, но они образуют максимизирующую последовательность для задачи (3), (4). То же верно и в случае, когда условие б) не выполняется, но для всех $k=1, 2, \dots$ уравнение (8) имеет неотрицательное решение x^k (уравнение (9) всегда имеет неотрицательное решение при условии А).

При решении некоторых конкретных классов задач вида (3), (4) наложение условий А или Б может оказаться излишним. Так, например, если рассматривается задача (1), (2) с дополнительными предположениями относительно векторов $c(t)$, $b(t)$ и матриц $A(t)$, $H(t, \tau)$, указанных выше, и $A(t) = A = \text{const}$, то для справедливости теоремы 5 достаточно только лишь условия А. Для этой задачи имеет место и более общее утверждение.

Теорема 6. Пусть выполнение условия А заранее не предполагается. Если при решении задачи (1), (2) методом (8) — (10) свойство б) выполняется для всех $k=1, 2, \dots$, то выполняются и остальные свойства, перечисленные в теореме 5. Если при некотором k свойство б) нарушается, то линейная форма (1) не ограничена при условиях (2).

Примечание при корректуре. К сожалению, лишь недавно, когда эта заметка была уже сдана в печать, авторы познакомились со статьей ⁽¹¹⁾, в которой получен результат, идейно близкий к нашей теореме 2.

Институт проблем управления
Москва

Поступило
19 XI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. Гурвиц, В кн.: Исследования по линейному и нелинейному программированию, М., 1962. ² Р. Даффин, В кн. Линейные неравенства и смежные вопросы, М., 1959. ³ Ю. П. Кривенко, Математические и вычислительные вопросы линейного динамического программирования, ВЦ АН СССР, М., 1969. ⁴ Р. Беллман, Динамическое программирование, М., 1960. ⁵ О. А. Гусев, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 4, 45 (1973). ⁶ М. В. Мееров, В. Г. Фридман, там же, № 3, 34 (1965). ⁷ W. F. Tyndall, SIAM J. Appl. Math., v. 15, 5, 1294 (1967). ⁸ N. Levinson, J. Math. Anal. Appl., 16, 1, 73 (1966). ⁹ R. N. Buie, J. Abrham, Zs. Operations Res., v. 17, 3, 107 (1973). ¹⁰ М. В. Мееров, Б. Л. Литвак, Оптимизация систем многосвязного управления, М., 1972. ¹¹ В. З. Бельский, ДАН, т. 183, № 1 (1968).