

С. Ф. СОПРУНОВ

**СИЛЬНЫЕ НЕСТАНДАРТНЫЕ МОДЕЛИ АРИФМЕТИКИ**

(Представлено академиком П. С. Новиковым 25 VI 1974)

1. Исходные определения. Стандартная арифметика — структура  $N_\sigma = \langle N^0, \sigma \rangle$ , где  $N^0$  — натуральный ряд,  $\sigma = \{+, \times, \leq\}$  и  $+, \times, \leq$  интерпретируются обычным образом. Иногда индекс  $\sigma$  в обозначении  $N_\sigma$  будем опускать. Структура  $M = \langle M^0, \sigma \rangle$  называется арифметикой, если  $M$  — элементарное расширение  $N_\sigma$  ( $M > N_\sigma$ ). Пусть  $M$  — арифметика. Множество всех  $n$ -местных отношений, формульных в структуре  $M$ , мы будем обозначать  $\pi_M^n$ . Множество всех формульных функций от  $n$  аргументов мы будем обозначать  $\pi_{\sigma, M}^{n+1}$ . Если  $M = N_\sigma$ , то вместо  $\pi_M^n$  ( $\pi_{\sigma, M}^n$ ) мы будем писать  $\pi_\sigma^n$  ( $\pi_{\sigma, \sigma}^n$ ) или даже просто  $\pi^n$  ( $\pi_\sigma^n$ ). Если  $M_1$  и  $M_2$  — арифметики, то  $M_1$  элементарно вложима в  $M_2$  ( $M_1 <_o M_2$ ), если существует  $K < M_2$  такая, что  $M_1$  изоморфна  $K$  ( $M_1 \cong K$ ). Если  $M = \langle M^0, \sigma \rangle$  — арифметика,  $a \in M$ , то символом  $M[a]$  обозначается подмодель  $M$  с носителем  $\{b \in M \mid (\exists f \in \pi_{\sigma, \sigma}^2) (M \models f(a) = b)\}$ . Арифметика  $M$  называется простой арифметикой, если  $M = M[a]$  для некоторого  $a \in M$  (1). Такое  $a$  называется порождающим элементом  $M$ . Если  $M$  — арифметика,  $M > M_1$ ,  $M > M_2$ , то  $\{M_1 \cup M_2\} = \cap \{K < M \mid K \supset M_1 \cup M_2\}$ . Каждой арифметике  $M = \langle M^0, \sigma \rangle$  сопоставим структуры  $S_1(M)$  и  $S_2(M)$  следующим образом:  $S_1(M) = \langle \{K \mid K < M\}, \subset \rangle$ ,  $S_2(M) = \langle M^0, \leq_o \rangle$ , где отношение  $\leq_o$  определено на  $M^0$  так, что  $a \leq_o b$  тогда и только тогда, когда  $a \in M[b]$ . Легко видеть, что  $S_2(M)$  — верхняя полурешетка, а  $S_1(M)$  изоморфно решетке всех идеалов в  $S_2(M)$ .

Пусть  $M$  — простая арифметика,  $a$  порождает  $M$ . Тогда  $p_M^a$  — ультрафильтр в  $\langle \pi_\sigma^1, \subset \rangle$  — определяется следующим образом:  $p_M^a = \{A \in \pi_\sigma^1 \mid M \models \exists x A(x)\}$ . Пусть, обратно  $p$  — некоторый ультрафильтр  $\langle \pi_\sigma^1, \subset \rangle$ . Положим  $M_p = \langle \{f \mid f \in \pi_\sigma^2, \sigma\}, \sigma \rangle$ , где  $P \in \sigma$  определено так, что  $[M_p \models P(f_1, \dots, f_n)] \Leftrightarrow [\{x \mid N_\sigma \models P(f_1(x), \dots, f_n(x))\} \in p]$ . Легко видеть, что  $M_p$  — простая арифметика.

Так же как и в (2), мы обозначим множество всех ультрафильтров (всех неглавных ультрафильтров) в  $\langle \pi^1, \subset \rangle$  через  $St(\pi^1)$  ( $St^o(\pi^1)$ ). Если  $p \in St(\pi^1)$ ,  $f \in \pi_\sigma^2$ , то  $f(p) = \{A \in \pi^1 \mid f^{-1}(A) \in p\}$ . Определим отношения  $<_o, \cong$  на  $St(\pi^1)$  следующим образом:  $p <_o q \Leftrightarrow (\exists f \in \pi_\sigma^2) (f(q) = p)$ ;  $p \cong q \Leftrightarrow (\exists f \in \pi_\sigma^2) (\exists A \in p) (f \upharpoonright A$  взаимно однозначна и  $f(p) = q)$ . Мы будем в основном изучать простые арифметики.

Лемма 1.1. Пусть  $M$  — счетная арифметика. Тогда существует простая арифметика  $M_1$  такая, что  $M_1 > M$ .

Лемма 1.2. Пусть  $M, K$  — простые арифметики. Пусть  $a$  порождает  $M$ ,  $b$  порождает  $K$ . Тогда  $M \cong K \Leftrightarrow p_M^a \cong p_K^b$ ;  $M <_o K \Leftrightarrow p_M^a <_o p_K^b$ ;

Арифметика называется минимальной, если любая ее собственная элементарная подмодель стандартна. Простая арифметика  $M$  называется равномерной, если  $(\forall A \in \pi_M^1) (A \cap N^0 \in \pi_\sigma^1)$ . Это эквивалентно тому, что  $(\forall A \in \pi_\sigma^2) (\{y \mid \{x \mid (x, y) \in A\} \in p_M^a\} \in \pi_\sigma^1)$  для любого  $a$ , порождающего  $M$ .

С помощью методов из работы (3) легко получается

Лемма 1.3. Пусть  $\text{card}(\sigma) \leq \omega$ . Тогда существует  $2^o$  неизоморфных минимальных равномерных арифметик.

Символом  $\sigma^*$  мы обозначим сигнатуру полной арифметики, т. е.  $\sigma^* = \{+, \times, \leq\}$  и в  $\sigma^*$  содержатся символы для любого подмножества  $N^0$ . В работе

(<sup>2</sup>) показано, что из аксиомы Мартина следует существование бесконечно-много множества неизоморфных минимальных полных арифметик.

2. Все основные определения и утверждения этого раздела взяты с некоторыми изменениями из работы (<sup>2</sup>), где рассматриваются ультрафильтры только в  $\langle 2^{N^0}, \subset \rangle$ . Ясно, что в этом случае последовательность дискретна  $\Leftrightarrow$  последовательность арифметична  $\Leftrightarrow$  последовательность равномерно арифметична. Легко видеть, что все утверждения, сформулированные для ультрафильтров, в силу леммы 1.2 переносятся на простые арифметики.

**Лемма 2.1.** Пусть  $f \in \pi_{0,\sigma}^2$ . Тогда существуют  $A_1, \dots, A_h$  такие, что  $A_i \in \pi_{\sigma^1}$ ,  $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ ,  $\bigcup_{i=1}^h A_i = N^0$ ,  $A_1 = \{x \mid f(x) = x\}$  и  $(\forall i > 1) (f(A_i) \cap A_i = \emptyset)$ .

**Лемма 2.2**

- 1)  $(\forall p \in St(\pi^1)) (\forall f \in \pi_{0,\sigma}^2) ((f(p) = p) \Leftrightarrow (\{x \mid f(x) = x\} \in p))$ ;
- 2)  $(\forall p, q \in St(\pi^1)) (p <_0 q \ \& \ q <_0 p \Rightarrow p \cong q)$ .

Если сформулировать 2) в терминах простых арифметик, то получится Теорема 2.3 (<sup>4</sup>). Пусть  $M$  — простая арифметика,  $\varphi: M \rightarrow M$  — элементарное вложение. Тогда  $\varphi$  — тождественное отображение.

Пусть  $X: N^0 \rightarrow St(\pi^1)$ . Через  $\bar{X}$  мы будем обозначать

$$\{p \mid p \in St(\pi^1) \ \& \ (\forall A \in p) (\exists i \in N^0) (A \in X(i))\}.$$

Пусть  $X: N^0 \rightarrow St(\pi^1)$ . Последовательность  $X$  называется дискретной если найдется  $P \in \pi^2$  такое, что  $(\forall i, j \in N^0) (i \neq j \Rightarrow \{x \mid (x, i) \in P \ \& \ (x, j) \in P\} = \emptyset)$ ;  $(\forall i \in N^0) (\{x \mid (x, i) \in P\} \in X(i))$ . Последовательность  $X$  называется арифметической, если она дискретна и  $(\forall A \in \pi^1) (\{i \mid A \in X(i)\} \in \pi^1)$ . Последовательность  $X$  называется равномерно арифметической, если она дискретна и  $(\forall A \in \pi^2) (\{(i, j) \mid \{x \mid (x, j) \in A\} \in X(i)\} \in \pi^2)$ .

Ультрафильтр  $p$  назовем равномерным, если  $M_p$  — равномерная арифметика.

Пусть  $X$  — арифметическая последовательность и  $p \in St(\pi^1)$ . Определим  $\Sigma(X, p) = \{A \in \pi^1 \mid \{i \mid A \in X(i)\} \in p\}$ ,  $\Omega(X, p) = \{A \in \pi^1 \mid (\forall B \in p) (\exists n \in A) (B \in X(n))\}$ .

**Лемма 2.4.** Если  $X$  — арифметическая последовательность,  $p \in St(\pi^1)$ , то:

- 1)  $\Sigma(X, p) \in \bar{X}$ ;
- 2)  $p \in \bar{X} \Rightarrow \Omega(X, p) \in St(\pi^1)$ ;
- 3)  $p \in \bar{X} \Rightarrow \Sigma(X, \Omega(X, p)) = p$ ;
- 4)  $\Omega(X, \Sigma(X, p)) = p$ ;
- 5)  $\Sigma(X, p) \in \text{ran}(X) \Leftrightarrow p$  — главный ультрафильтр;
- 6) если  $X$  — равномерно арифметическая последовательность,  $p$  — равномерный ультрафильтр, то  $\Sigma(X, p)$  — равномерный ультрафильтр;
- 7)  $p <_0 \Sigma(X, p)$ ;
- 8)  $p$  равномерный и  $p_0 > q \Rightarrow q$  равномерный.

Пусть  $p, q \in St(\pi^1)$ . Определим отношение  $p > q$  так, что  $p > q$  тогда и только тогда, когда существует равномерно арифметическая последовательность  $X$  такая, что  $p = \Sigma(X, q)$ .

**Теорема 2.5.**

- 1)  $p > q \ \& \ q > r \Rightarrow p > r$ .
- 2)  $q < p \ \& \ r < p \Rightarrow q < r \vee r < q \vee r \cong q$ .
- 3)  $p > q \Rightarrow \neg(p \cong q)$ .

Пусть  $p \in St^0(\pi^1)$ . Мы скажем, что  $p$  — рамсеевский ультрафильтр, если для всякой  $f \in \pi_{0,\sigma}^3$  такой, что  $f: \{(x, y) \mid x < y\} \rightarrow \{0, 1\}$ , существует  $A \in p$  такое, что  $f \upharpoonright \{(x, y) \mid x < y \ \& \ x \in A \ \& \ y \in A\}$  — постоянная.

**Лемма 2.6.** Пусть  $M$  — минимальная равномерная арифметика, а порождает  $M$ . Тогда  $p_M^0$  — рамсеевский ультрафильтр.

Если  $X$  — арифметическая последовательность,  $M$  — простая арифметика,  $a$  — порождающий элемент  $M$ , то определим  $\Sigma(X, M, a) = M_{\Sigma(X, p_M^0)}$ .

3. Пусть  $M$  — некоторая арифметика,  $M_1 \prec M$ . Мы скажем, что  $M_1$  конфинальна  $M$ , если  $(\forall x \in M) (\exists y \in M_1) (M \models y > x)$ . Подструктура  $M_1$  максимальна в  $M$ , если  $M_1 \neq M$  и для всякой арифметики  $M_r \prec M$  такой, что  $M_2 \not\prec M_1$ , имеет место  $[M_1 \cup M_2] = M$ .

Лемма 3.1. (3). Пусть арифметика  $M$  такая, что  $M \succ M_1$ ,  $M \succ M_2$ ,  $M_1$  — простая арифметика,  $M_1, M_2$  конфинальны  $M$ . Тогда  $M_1 \cap M_2$  конфинальна  $M$ .

Теорема 3.2. Пусть  $\sigma$  — некоторая сигнатура такая, что  $\text{card}(\sigma) \leq \omega$  или  $\sigma = \sigma^*$  и существует бесконечно много попарно неизоморфных простых полных минимальных арифметик. Пусть  $f \in \pi_{0, \sigma}^2$ . Тогда существует равномерно арифметическая последовательность  $X_f: N^0 \rightarrow \text{St}(\pi^4)$ , удовлетворяющая следующему условию: если взять произвольную простую арифметику  $M$  с порождающим элементом  $a$  и положить  $M_1 = \Sigma(X_f, M, a)$ , то:

1) существует  $\alpha \in M_1$  такое, что  $M_1[\alpha] \cong M$ ,  $M_1[\alpha]$  максимальна в  $M_1$  и не конфинальна  $M_1$ ;

2)  $(\forall \beta \in M_1) (\exists \gamma \in M_1[\alpha]) (M_1[\alpha] \cap M_1[\beta] = M_1[\gamma] \supset M_1[f(\alpha)])$ ;

3)  $(\forall \beta_1, \beta_2 \in M_1) (M_1[\beta_1] \not\prec M_1[\alpha] \ \& \ M_1[\beta_2] \not\prec M_1[\alpha] \ \& \ M_1[\alpha] \cap M_1[\beta_1] \supset M_1[\alpha] \cap M_1[\beta_2]) \Rightarrow M_1[\beta_1] \supset M_1[\beta_2]$ ;

4)  $(\forall \gamma \in M_1[\alpha]) (\exists \beta \in M_1) (M_1[\gamma] \supset M_1[f(\alpha)] \Rightarrow M_1[\gamma] = M_1[\beta] \cap M_1[\alpha] \ \& \ M_1[\beta] \not\prec M_1[\alpha])$ ;

Следствие. Пусть условия теоремы 3.2 относительно  $\alpha$  выполнены. Пусть  $S$  — некоторая конечная дистрибутивная решетка,  $M_0$  — произвольная минимальная арифметика. Тогда существует кортеж простых арифметик  $M_0, M_1, \dots, M_k$  такой, что  $M_{i+1} = \Sigma(X_{f_i}, M_i, a_i)$  для некоторого  $f_i \in \pi_{0, \sigma}^2$  и  $a_i$ , порождающего  $M_i$ , и  $S_1(M_k) \cong S$ . Причем из теоремы 2.6 работы (2) следует, что количество таких неизоморфных  $M_k$  не меньше количества минимальных арифметик.

Следующая теорема накладывает некоторые ограничения на решетку  $S_1(M)$ .

Теорема 3.3. Пусть  $M = \langle M^0, \sigma \rangle$  — некоторая простая арифметика, где  $\sigma$  — некоторая сигнатура. Пусть  $a$  порождает  $M$  и для некоторого  $f \in \pi_{0, \sigma}^2$  арифметика  $M' = M[f(a)]$  максимальна в  $M$  и не конфинальна  $M$ . Тогда:

1)  $\{M' \cap M_1 \mid M_1 \prec M \ \& \ M_1 \not\prec M'\}$  — фильтр в  $S_1(M')$ .

2)  $(\forall M_1, M_2) (M_1 \prec M \ \& \ M_2 \prec M \ \& \ M_1 \not\prec M' \ \& \ M_2 \not\prec M' \ \& \ M_1 \cap M' \supset M_2 \cap M' \Rightarrow M_1 \supset M_2)$ ;

Следствие. Пусть  $M$  — простая арифметика,  $a$  порождает  $M$ ,  $f \in \pi_{0, \sigma}^2$ ,  $M[f(a)]$  максимальна в  $M$  и не конфинальна  $M$ ,  $S_1(M[f(a)])$  — дистрибутивная решетка. Тогда  $S_1(M)$  дистрибутивна.

В некоторых случаях, для того чтобы установить некофинальность  $M[f(a)]$ , можно воспользоваться леммой 3.1.

В работе (6) показано, что если  $\text{card}(\sigma) \leq \omega$ , то для любой дистрибутивной решетки  $S$  существуют простые необходимые и достаточные условия, позволяющие установить, существует ли арифметика  $M$  такая, что  $S_1(M) \cong S$ . Однако можно показать, что для любой сигнатуры  $\sigma$ ,  $\text{card}(\sigma) \leq \omega$ , существует счетная арифметика  $M$  такая, что  $S_1(M)$  недистрибутивна.

4. Теорема 4.1. Пусть  $\langle M, \sigma \rangle$  — минимальная, равномерная арифметика,  $P$  — некоторое отношение на  $N^0$ ,  $P$   $n$ -местно. Тогда 1) эквивалентно 2):

1)  $P$  можно продолжить на  $M$  так, что  $\langle M, \sigma \cup \{P\} \rangle \succ N_{\sigma \cup \{P\}}$ ;

2)  $P \in \pi_{\sigma}^n$ .

Теорема 4.2. Пусть  $P$  — некоторое отношение, определенное на  $N^0$ ,  $\langle M_2, \sigma \rangle$ , и  $\langle M_1, \sigma \cup \{P\} \rangle$  — такие арифметики, что  $\langle M_2, \sigma \rangle \succ \langle M, \sigma \rangle$  и  $\langle M_1, \sigma \rangle$  конфинально  $\langle M_2, \sigma \rangle$ . Тогда  $P$  можно единственным образом продолжить на  $M_2$  так, что  $\langle M_2, \sigma \cup \{P\} \rangle \succ \langle M_1, \sigma \cup \{P\} \rangle$ .

Пусть  $M = \langle M^0, \sigma \rangle$  — некоторая структура. Мы скажем, что структура  $M^* = \langle M^0, \sigma_1 \rangle$  определима в  $M$ , если для любого  $P \in \sigma_1$  отношение  $[M^* \models P(x_1, \dots, x_n)]$  формульно в  $M$ .

Теорема 4.3. Пусть  $\sigma$  — некоторая сигнатура такая, что  $\text{card}(\sigma) \leq \omega$ . Тогда существуют арифметики  $M$  и  $M^*$  с сигнатурой  $\sigma$  такие, что:

- 1)  $M^*$  определима в  $M$ ;
- 2)  $M$  элементарно вложима в  $M^*$ ;
- 3)  $M$  и  $M^*$  неизоморфны.

Теорема 4.4. Пусть  $M$  — нестандартная арифметика,  $a \in \pi_M^1$ ,  $a$  бесконечно. Пусть  $r$  — некоторое двухместное отношение, вполне упорядочивающее  $a$ . Тогда  $r \notin \pi_M^2$ .

Автор глубоко благодарен В. А. Успенскому за внимание к работе.

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова

Поступило  
5 VI 1974

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> A. Robinson, *Infinitistic Methods*. Proceedings of the Symposium of Foundation of Mathematic, Warszawa, 1961, p. 265.   <sup>2</sup> D. Booth, *Ann. Math. Logic*, v. 2, 1 (1970).  
<sup>3</sup> H. Gaifman, *Math. Logic and Foundation of Set Theory*. Proc. of Intern. Colloquium, Jerusalem, 1968, p. 105.   <sup>4</sup> A. Ehrenfeucht, *J. Symbol. Logic*, v. 38, 2, 291 (1973).  
<sup>5</sup> A. Blass, *J. Symbol. Logic*, v. 37, 1, 103 (1972).   <sup>6</sup> J. B. Paris, *Lect. Notes Math.*, v. 255, 261 (1972).