Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 2

УДК 624.13.31/32 *ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ*

З. Г. ТЕР-МАРТИРОСЯН, Д. М. АХПАТЕЛОВ

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ГОРНЫХ МАССИВОВ В ПОЛЕ ГРАВИТАЦИИ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 19 VII 1974)

Одной из основных задач геомеханики является оценка напряженного состояния горных массивов в поле гравитации, необходимая для количественных анализов и прогнозирования экзогенных геологических процессов, связанных с деятельностью человека.

В настоящей работе приводится постановка и решение ряда задач, позволяющих оценить напряженное состояние горных массивов в однородном гравитационном поле с широким классом криволинейных границ, описывающих профили горных массивов, глубоких и пологих долин, склонов и пр. Решение представляется в рамках плоской задачи теории упругости (плоская деформация) в предположении, что горный массив представлен однородными изотропными упругими породами.

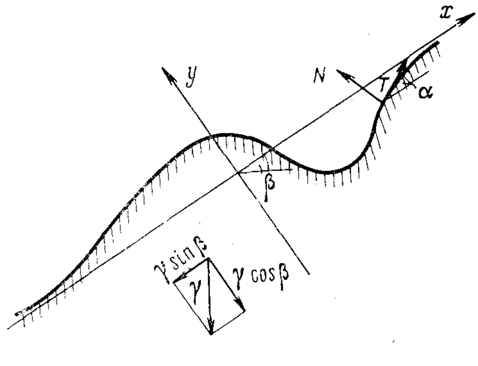

Рис. 1. Расчетная схема

Для решения применен метод комплексных переменных Колосова — Мусхелишвили ([1]) с использованием конформного отображения и свойств интегралов Коши. Этот метод в настоящее время широко применяется при решении задач теории упругости без учета объемных сил.

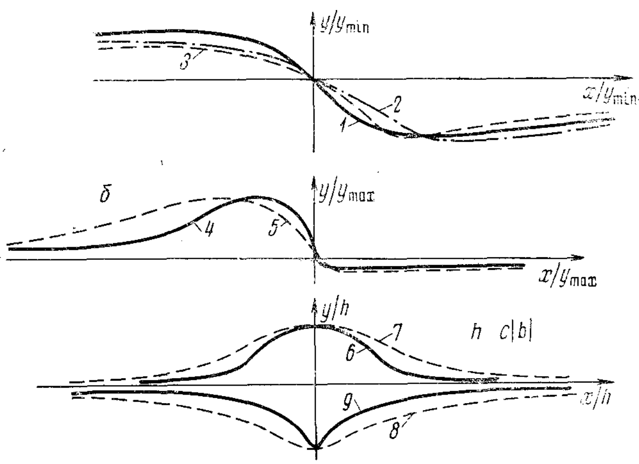

Рис. 2. Внешние контуры профилей горных массивов для различных значений параметров отображающей функции:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B	2	2	2	4	2				
a	−0,4	−1	−1	2	2				
d	3	3	4	2	2				
b						2	1	−0,5	−0,9

В настоящей статье впервые делается попытка решения плоской задачи теории упругости с учетом объемных сил с широким классом криволинейных границ. Решения получены в замкнутом виде и позволяют рассчитывать все компоненты напряженного состояния в горном массиве и в любой точке.

Постановка и решение задачи. Пусть полубесконечная область, ограниченная криволинейной границей, с асимптотой, совпадающей с осью абсцисс, находится в однородном поле гравитации (рис. 1). Необходимо определить напряженное состояние этой области в предположении, что криволинейная граница свободна от нагрузок. Для общности поставленной задачи направим ось x под углом β к горизонту. Растягивающие напряжения приняты положительными.

Решение поставленной задачи, как известно, сводится к интегрированию уравнений равновесия

$$\frac{\partial\sigma_x^0}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}^0}{\partial y}=\gamma\sin\beta,\qquad \frac{\partial\sigma_y^0}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}^0}{\partial x}=\gamma\cos\beta \tag{1}$$

и удовлетворению условиям совместности (неразрывности) $\Delta(\sigma_x+\sigma_y)=0$ и граничным условиям

$$\begin{gathered} N^0=\frac{\sigma_x^0+\sigma_y^0}{2}-\frac{\sigma_x^0-\sigma_y^0}{2}\cos 2\alpha_0-\tau_{xy}^0\sin 2\alpha_0=0,\\ T^0=-\frac{\sigma_x^0-\sigma_y^0}{2}\sin 2\alpha_0+\tau_{xy}^0\cos 2\alpha_0=0. \end{gathered} \tag{2}$$

Задача решалась способом, описанным в работе ([4]).

В качестве частного решения принято напряженное состояние бесконечного склона с прямолинейной границей

$$\sigma_x^{\text{ч}}=K\gamma\cos\beta\cdot y,\quad \sigma_y^{\text{ч}}=\gamma\cos\beta\cdot y,\quad \tau_{xy}=\gamma\sin\beta\cdot y, \tag{3}$$

где $K=\mu/(1-\mu)$ — коэффициент бокового давления, μ — коэффициент Пуассона, γ — объемный вес пород, составляющих горный массив.

С учетом (3), граничные условия для дополнительных напряжений запишутся в виде

$$\begin{gathered} N=y\left[-\frac{K_x+K_y}{2}+\frac{K_x-K_y}{2}\cos 2\alpha_0+K_{xy}\sin 2\alpha_0\right],\\ T=y\left[\frac{K_x+K_y}{2}\sin 2\alpha_0-K_{xy}\cos 2\alpha_0\right], \end{gathered} \tag{4}$$

$$K_x=KK_y,\quad K_y=\gamma\cos\beta,\quad K_{xy}=\gamma\sin\beta. \tag{5}$$

Функцию, отображающую нижнюю полуплоскость на исследуемую область, примем в виде

$$z=w(\zeta)=c\left[\zeta-\frac{B\zeta-b}{\zeta+a-di}\right], \tag{6}$$

где $z=x+iy$, $\zeta=\xi+i\eta$, $\eta\leqslant 0$, $d>0$, B, a, b — постоянные величины, c — коэффициент пропорциональности.

Отделив в (6) вещественные и мнимые части, получаем при $\xi=t$, $\eta=0$ параметрические уравнения

$$x=c\left[t-\frac{(Bt-b)(t+a)}{(t+a)^2+a^2}\right],\qquad y=-c\frac{(Bt-b)d}{(t+a)^2+d^2}, \tag{7}$$

описывающие граничные кривые исследуемых областей. На рис. 2 приведены внешние контуры полубесконечных областей для различных значе-

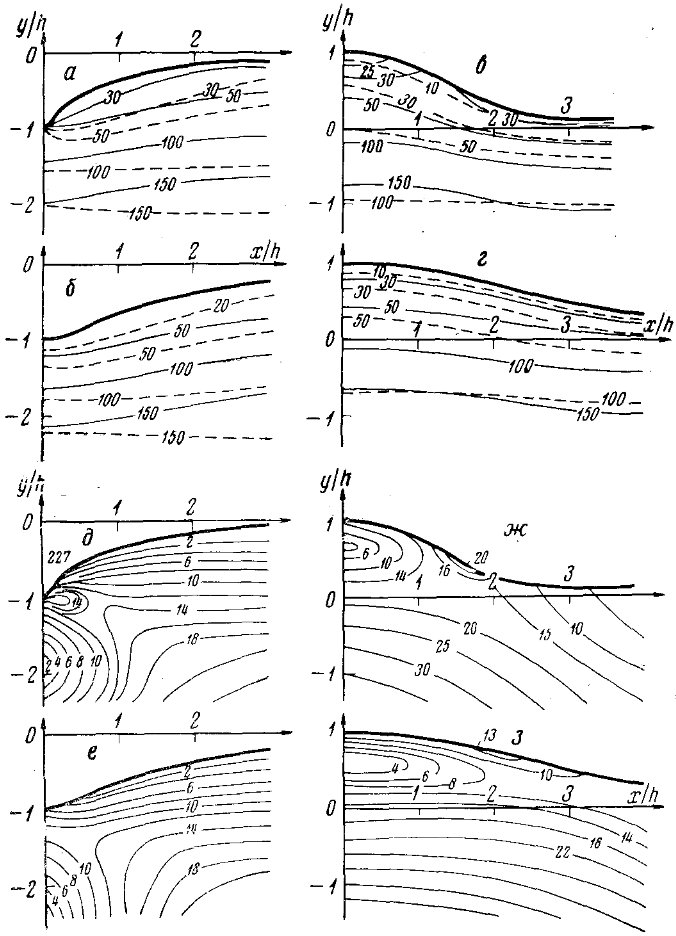

Рис. 3. Изолинии главных нормальных (a–$г$) и максимальных касательных ($д$–$з$) напряжений для горных массивов с параметрами: $b=-0{,}9$ ($a, д$); $-0{,}5$ ($б, е$); 1 ($в, ж$); 0,39 ($г, з$)

ний параметров a, d, B, b. Граничные кривые, построенные при $b=0$, имеют вид (1) и (2), а при $B=a=0$, $d=1$ имеют вид (3).

С учетом (6) граничные условия для дополнительных напряжений в комплексной форме примут вид

$$N+iT=\frac{cd}{2}\left\{\frac{(K_x+K_y)(Bt-b)}{(t+a^2)+d^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{(K_x-K_y+2K_{xy}i)(t+a+di)\left[(t+a+di)^2-Ba-b-Bdi\right]}{(t+a-di)^3\left[(t+a+di)^2-Ba-b-Bdi\right]}\right\}. \qquad (8)$$

В замкнутом виде были получены выражения для голоморфных в нижней полуплоскости комплексных потенциалов $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$, через которые дополнительные напряжения выражаются по известным формулам

$$\sigma_\xi+\sigma_\eta=2\left[\Phi(\zeta)+\overline{\Psi(\zeta)}\right], \qquad (9)$$

$$\sigma_\eta+\sigma_\xi+2i\tau_{\xi\eta}=\frac{2}{w'(\xi)}\left[\overline{w(\xi)}\,\Phi'(\xi)+w(\xi)\,\Psi(\xi)\right].$$

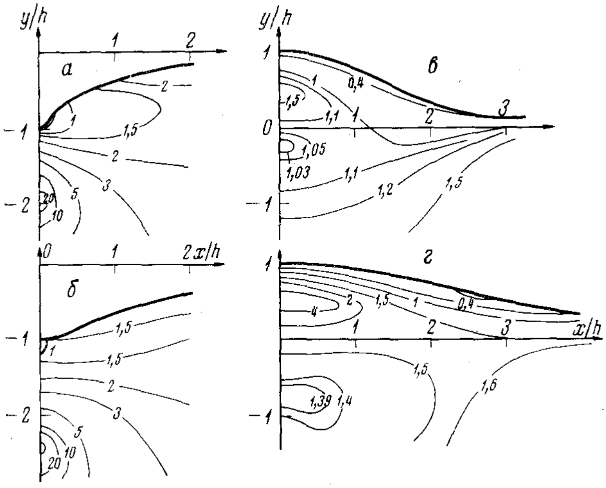

Рис. 4. Изолинии коэффициентов запаса прочности для горных массивов с параметрами: $b=-0{,}9$ (*а*); $-0{,}5$ (*б*); 1 (*в*); 0,39 (*г*)

Нетрудно представить и частное решение в криволинейных координатах $\sigma_\xi^{ч}$, $\sigma_\eta^{ч}$, $\tau_{\xi\eta}^{ч}$. Окончательное решение можно представить в виде суммы частных и дополнительных решений в виде

$$\sigma_\xi^0=\sigma_\xi+\sigma_\xi^{ч},\quad \sigma_\eta^0=\sigma_\eta+\sigma_\eta^{ч},\quad \tau_{\xi\eta}=\tau_{\xi\eta}+\tau_{\xi\eta}^{ч}. \tag{10}$$

По известным соотношениям

$$\sigma_x^0+\sigma_y^0=\sigma_\xi^0+\sigma_\eta^0,$$

$$(\sigma_y^0-\sigma_x^0+2i\tau_{xy})\frac{w'(\xi)}{\overline{w'(\xi)}}=\sigma_\eta^0-\sigma_\xi^0+2i\tau_{\xi\eta}^0$$

найдем напряжения в координатах x, y.

По полученным в замкнутом виде решениям произведены расчеты на ЭВМ М-20, результаты которых в виде изолиний главных напряжений, а также изолиний коэффициентов запаса прочности представлены на рис. 3, 4.

Коэффициент запаса прочности определяет отношение предельного значения касательных напряжений (по теории прочности Кулона — Мора) для наиболее опасной площадки к значению действующих на этой площадке касательных напряжений:

$$\eta=\frac{\tau_{пр}}{\tau_д}=\frac{(\sigma_x^0+\sigma_y^0)+2c\operatorname{ctg}\varphi\sin\varphi\sin^2\varphi}{2\tau_{\max}\cos^2\varphi\cos^2\varphi},$$

где c — сцепление, φ — угол внутреннего трения.

При $\eta\geqslant1$ порода в этой точке находится в прочном состоянии, при $\eta<1$ построенное решение непригодно и наличие таких областей указывает на возможность возникновения вблизи них разрушений и пластических течений.

Московский государственный университет
им. В. В. Куйбышева

Поступило
3 VII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Н. И. Мусхелишвили*, Некоторые задачи математической теории упругости, «Наука», 1966. [2] *Н. А. Цытович*, Основания, фундаменты и механика грунтов № 5 (1971). [3] *З. Г. Тер-Мартиросян, Д. М. Ахпателов*, Тематич. сб. ин-та Всесоюзн. н.-и. инст. гидрогеол. и инж. геол., в. 15, М., 1969. [4] *Д. М. Ахпателов, З. Г. Тер-Мартиросян*, Изв. АрмССР, Механика, т. 24, № 3, 33 (1971).