Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 2

УДК 517.51 МАТЕМАТИКА

А. Б. ХАРАЗИШВИЛИ

О НЕЭЛЕМЕНТАРНЫХ МЕРАХ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 17 VI 1974)

Пространством с инвариантной мерой будем называть всякую четверку (X, G, S, μ), где X — произвольное множество, G — некоторая группа перестановок X, S—G-инвариантное σ-кольцо частей X, являющееся покрытием X, μ—G-инвариантная мера на S. Таким образом, тройка (G, S, μ) есть структура определенного рода на паре (X, R), причем X берется как основное базисное множество, а R — действительная прямая — выступает в роли вспомогательного базисного множества (см. ([1])).

Пусть (X, G, S, μ) — пространство с инвариантной мерой Y—μ-измеримое, относительно μ почти G-инвариантное подмножество X (т. е. $(\forall g)(g\in G\Rightarrow\mu(g(Y)\Delta Y)=0)$. Отображение μ_Y: $Z\to\mu(Z\cap Y)$, $Z\in S$, назовем частью меры μ, ассоциированной с Y. Говорим, что часть μ_Y есть элемент μ, если выполняется следующее условие: для каждого $Z\in S$ с $\mu_Y(Z)>0$ существует последовательность $(g_n)_{n\in N}$ преобразований из G такая, что $\mu(Y\setminus\bigcap\limits_{n\in N} g_n(Z))=0$.

Пусть μ_1 и μ_2 — два элемента μ, ассоциированные соответственно с Y_1 и Y_2. Тогда $\mu(Y_1\Delta Y_2)=0$ или $\mu(Y_1\cap Y_2)=0$. Очевидно, далее, что для любой инвариантной меры μ найдется семейство $(\mu_{Y_i})_{i\in I}$ элементов μ, которое удовлетворяет соотношениям:

a) $(\forall i)(i\in I\Rightarrow\mu(Y_i)>0)$,

b) $(\forall i)(\forall j)(\{i, j\}\subset I\ \&\ i\neq j\Rightarrow\mu(Y_i\cap Y_j)=0)$,

c) $(\forall Y)((Y\in S\ \&\ \mu(Y)>0\ \&\ \mu_Y$ — элемент $\mu)\Rightarrow(\exists i)(i\in I\ \&\ \mu(Y_i\Delta Y)=0))$.

Отметим, в частности, что множество индексов I может быть и пустым. Если μ—σ-конечная мера, то, как легко видеть, $\mathrm{Card}\, I\leqslant\aleph_0$.

Предположим, что для инвариантной меры μ имеет место равенство $\mu=\sum\limits_{i\in I}\mu_{Y_i}$, где $(\mu_{Y_i})_{i\in I}$ — указанное выше семейство элементов μ. В этом случае μ называется разложимой мерой (см. ([2])). При $\mu\neq\sum\limits_{i\in I}\mu_{Y_i}$ μ назовем неразложимой мерой. Наконец, скажем, что μ вполне неэлементарна, если всякий элемент μ представляет собой постоянное отображение в $\{0\}$.

Определенный интерес вызывает вопрос о существовании нетривиальных (т. е. принимающих более чем $\aleph_0$ значений) вполне неэлементарных мер в эвклидовом пространстве E_n, наделенном группой $\mathscr{D}_n$ всех его изометрических преобразований.

В настоящей статье приводится один способ построения такой меры.

Предложение 1. *Пусть $n\geqslant 1$, φ — начальное порядковое число мощности континуума, α — кардинальное число, не меньшее n и не превосходящее $2^{\aleph_0}$.*

Тогда найдется разбиение $(X_\xi)_{\xi<\varphi}$ пространства E_n, для которого справедливы следующие соотношения:

1) $(\forall\xi)(\forall\Gamma)((\xi<\varphi\ \&\ \Gamma$ — *гиперплоскость в* $E_n)\Rightarrow\mathrm{Card}\,(X_\xi\cap\Gamma)=\alpha)$,

2) $(\forall\xi)(\forall\Gamma)((\xi<\varphi\ \&\ F$ — *замкнутое подмножество E_n со строго положительной борелевской мерой*$)\Rightarrow\mathrm{Card}\,(F\cap X_\xi)=2^{\aleph_0})$.

Доказательство этого предложения легко получается двойной трансфинитной индукцией. Беря $\alpha=n$, в частности, имеем следующее утверждение.

Лемма 1. *Произвольная замкнутая часть E_n строго положительной лебеговской меры содержит континуальное множество точек общего положения.*

Утверждение леммы можно доказать и непосредственно индукцией по n, применив теорему Фубини.

Лемма 2. *Если $n\geqslant 1$, φ — начальное ординальное число мощности континуума, $(g_\xi)_{\xi<\varphi}$ — инъективное семейство всех движений E_n и $(F_\xi)_{\xi<\varphi}$ — класс борелевских подмножеств E_n строго положительной меры, то существует семейство $(x_\xi)_{\xi<\varphi}$ точек пространства E_n, которое обладает следующими свойствами:*

1) $(\forall\xi)(\xi<\varphi\Rightarrow \mathrm{Card}\,(F_\xi\cap(\bigcup\limits_{\zeta<\varphi}\{x_\zeta\})=2^{\aleph_0})$,

2) *для каждого $\zeta<\varphi$ пусть G_ζ — группа изометрических преобразований E_n с системой образующих $(g_\xi)_{\xi\leqslant\zeta}$, а $G_\zeta(Y)$ — объединение орбит элементов Y относительно $G_\zeta(Y\subset E_n)$. Тогда верны соотношения*

$$G_\zeta(\{x_\zeta\})\cap G_\zeta(\bigcup_{\xi<\zeta}\{x_\xi\})=\emptyset \quad и \quad (f\in G_\zeta \,\&\, g\in G_\zeta \,\&\, f\neq g)\Rightarrow f(x_\zeta)\neq g(x_\zeta).$$

Здесь тоже доказательство проводится методом трансфинитной индукции.

Исходя из леммы 2, легко убедиться в существовании семейства $(X_\xi)_{\xi<\varphi}$ частей E_n, служащего покрытием пространства E_n и такого, что при любом $\xi<\varphi$ X_ξ есть l_n-массивное множество (l_n — мера Лебега в E_n), при $\xi\neq\xi'$ пересечение X_ξ с $X_{\xi'}$ неконтинуально и для всякого движения g φ-последовательность $(g(X_\xi))_{\xi<\varphi}$ получается из $(X_\xi)_{\xi<\varphi}$ перестановкой членов $(X_\xi)_{\xi<\varphi}$. Достаточно, например, положить $X_\xi=g_\xi(\bigcup\limits_{\zeta<\varphi}\{x_\zeta\})$.

Обозначая через L_n класс подмножеств E_n, измеримых в смысле Лебега, рассмотрим счетно-аддитивный, $\mathscr{D}_n$-инвариантный класс Φ частей E_n вида $\bigcup\limits_{\xi<\varphi}(X_\xi\cap Y_\xi)$, где Y_ξ принадлежит $L_n(\xi<\varphi)$ и $\mathrm{Card}\,\mathscr{E}_\xi(Y_\xi\neq\emptyset)\leqslant\leqslant\aleph_0$. Определим отображение λ: $\Phi\to R$ с помощью равенства $\lambda(\bigcup\limits_{\xi<\varphi}(X_\xi\cap Y_\xi))=\sum\limits_{\xi<\varphi}l_n(Y_\xi)$. Если $\mathscr{F}(E_n)$ — множество всех неконтинуальных подмножеств E_n, то функция λ единственным образом продолжается до $\mathscr{D}_n$-инвариантной меры $\tilde\lambda$, задаваемой на σ-алгебре, порожденной $\Phi\cup\mathscr{F}(E_n)$, с условием, что для произвольного $y\in\mathscr{F}(E_n)$ выполняется соотношение $\tilde\lambda(Y)=0$.

Ясно, что построенная мера $\tilde\lambda$ не является σ-конечной.

Пусть $\tilde\lambda_Y$ — элемент, ассоциированный с частью Y пространства E_n. Тогда очевидно, что либо $\tilde\lambda(Y)=0$, либо $\tilde\lambda(E_n\setminus Y)=0$. Но множеством $X_\xi\cap Z$, где $Z\in L_n$ и $l_n(Z)>0$, нельзя исчерпать E_n посредством счетного семейства движений. Отсюда вытекает

Предложение 2. *Мера $\tilde\lambda$ вполне неэлементарна.*

В общем случае, имея пространство (X, G, S, μ) с G-инвариантной мерой μ, группу $G'\subset G$ назовем массивной, если для каждого $x\in X$ орбита x относительно G' представляет собой μ-массивную часть X. Допустим, что множество классов интранзитивности массивной группы G' несчетно, а сама G' есть нормальный делитель G. Тогда способом, аналогичным приведенному выше, мере μ можно сопоставить вполне неэлементарную меру μ_1, инвариантную по отношению к преобразованиям из группы G.

Заметим однако, что при $n\geqslant 2$ $\mathscr{D}_n$ не содержит массивного нормального делителя с несчетным числом орбит. Этим и объясняется сравнительная сложность построения нетривиальной $\mathscr{D}_n$-инвариантной вполне неэлементарной меры в E_n.

С другой стороны, для любого кардинального числа α, удовлетворяющего соотношениям $\aleph_0 \leqslant \alpha \leqslant 2^{\aleph_0}$, существует массивный нормальный делитель в группе $\mathscr{D}_1$ (соответственно в группе T_n параллельных переносов E_n), мощность множества классов интранзитивности которого равна α.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики
Тбилисского государственного университета

Поступило
5 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Н. Бурбаки*, Теория множеств, М., 1965. [2] *Ш. С. Пхакадзе*, Тр. матем. инст. АН ГрузССР, т. 29 (1963).