Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 2

УДК 517.945

МАТЕМАТИКА

Ф. ХИЛЬДЕБРАНД (ГДР)

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА «В ЦЕЛОМ» ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком В. С. Владимировым 24 VI 1974)

В настоящей работе рассматривается первая краевая задача «в целом» для квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$u_t+\sum_{i=1}^{n}(\varphi_i(t,x,u))_{x_i}+\psi(t,x,u)=0. \tag{1}$$

Эта задача для случая одной пространственной переменной в классе ограниченных измеримых функций рассматривалась в работах ([5], [6]) в предположении выпуклости функции $\varphi_1(u)$.

В последнее время значительное развитие получила теория задачи Коши для уравнения (1) (см. ([1–14])). В настоящей статье применяются и развиваются методы работ С. Н. Кружкова ([10], [12], [13]) для исследования первой краевой задачи в классе ограниченных измеримых функций.

1. Одномерный случай. В этом случае получены более сильные результаты о разрешимости краевой задачи, чем в случае многомерного уравнения.

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения

$$u_t+(\varphi(u))_x=0 \tag{2}$$

в полуполосе

$$\Pi_T{}^+=[0,T]\times[0,\infty)$$

с начальной и граничной функциями

$$u(0,x)=u_0(x),\qquad u(t,0)=u_1(t). \tag{3}$$

Предположим, что $u_0(x)$ — ограниченная измеримая функция на полуоси $\{x\geqslant 0\}$, а $u_1(t)$ — ограниченная измеримая функция на отрезке $[0,T]$, причем $|u_0(x)|\leqslant M$, $|u_1(t)|\leqslant M$.

Пусть функция $\varphi(u)$ непрерывна и пусть существуют положительные постоянные α и A такие, что для u и $v\in[-M,M]$

$$\alpha\leqslant\frac{\varphi(u)-\varphi(v)}{u-v}\leqslant A. \tag{4}$$

Определение 1. Ограниченная измеримая в $\Pi_T{}^+$ функцию $u(t,x)$ называется обобщенным решением задачи (2), (3), если

1) $\iint\limits_{\Pi_T{}^+}\operatorname{sign}(u-k)\{(u-k)f_t+(\varphi(u)-\varphi(k))f_x\}dx\,dt\geqslant 0$

для любой константы k и любой гладкой и финитной в $\Pi_T{}^+$ функции $f(t,x)\geqslant 0$.

2) Существуют множества $\mathfrak{H}_0$ и $\mathfrak{H}_1$ меры нуль на $[0,T]$ и $[0,\infty)$ соответственно такие, что при любых $R>0$

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\in[0,T]\setminus\mathfrak{H}_0}}\int_0^R|u(t,x)-u_0(x)|\,dx=0$$

и

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in[0,\infty)\setminus\mathfrak{H}_1}} \int_0^T |u(t,x)-u_1(t)|\,dt=0.$$

Для доказательства существования решения задачи (2), (3) строится такое продолжение начальной функции для $x<0$, что обобщенное решение в смысле определения работы ([13]) задачи Коши для уравнения (2) с начальной функцией $u_0(x)$ (определенной уже на всей оси) дает решение задачи (2), (3). Такое сведение задачи (2), (3) к задаче Коши в существенном основывается на следующем утверждении.

Лемма 1. *Пусть $u(t,x)$ и $v(t,x)$ являются обобщенными решениями задачи Коши для уравнения* (2) *с начальными функциями $u_0(x)$ и $v_0(x)$ соответственно. Пусть $|u(t,x)|\leqslant M$, $|v(t,x)|\leqslant M$.*

Тогда для почти всех $y\in(-\infty,+\infty)$ имеет место оценка

$$\int_0^T |u(t,y)-v(t,y)|\,dt\leqslant \frac{1}{\alpha}\int_{y-AT}^{y}|u_0(x)-v_0(x)|\,dx.$$

Теорема 1. *Решение задачи* (2), (3) *в смысле определения* 1 *существует.*

Теорема 2. *Пусть $u(t,x)$ и $v(t,x)$ являются решениями задачи* (2), (3) *с начальными и граничными данными $u_0(x)$, $u_1(t)$ и $v_0(x)$, $v_1(t)$ соответственно. Пусть $|u(t,x)|\leqslant M$, $|v(t,x)|\leqslant M$.*

Тогда для почти всех $t\in[0,T]$ и любого $R>\alpha T$ выполняется оценка

$$\int_0^R |u(t,x)-v(t,x)|\,dx\leqslant \int_0^{R-\alpha t}|u_0(x)-v_0(x)|\,dx+A\int_0^t |u_1(t)-v_1(t)|\,dt. \qquad (5)$$

Очевидно, из неравенства (5) следует единственность решения задачи (2), (3).

2. Многомерный случай. Пусть Ω — ограниченное измеримое в E_n множество с компактной границей $\partial\Omega\in C^{2,\alpha}$. Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения (1) в цилиндре $Q_T=[0,T]\times\Omega$ с начальным и граничным условиями

$$u(0,x)=u_0(x),\qquad u(t,x)\,|_{x\in\partial\Omega}=u_1(t,x)\,|_{x\in\partial\Omega} \qquad (6)$$

в классе ограниченных измеримых в Q_T функций (здесь $u_0(x)$, $u_1(t,x)$ — произвольные ограниченные измеримые функции). Функции $\varphi_i(t,x,u)$ и $\psi(t,x,u)$ считаем непрерывными по всем аргументам; кроме того предполагаем, что для $(t,x)\in Q_T$ и любых $u\in[-M,M]$

$$-\psi_u(t,x,u)\leqslant\gamma=\mathrm{const}, \qquad (7)$$

$$|\varphi_{iu}(t,x,u)|\leqslant N=\mathrm{const},\qquad i=1,2,\ldots,n. \qquad (8)$$

Определение 2. Ограниченная измеримая в Q_T функция $u(t,x)$ называется обобщенным решением задачи (1), (6), если:

1) Для любой финитной и гладкой функции $f(t,x)\geqslant 0$ и любой константы k выполняется неравенство

$$\iint\limits_Q \operatorname{sign}(u-k)\,\{(u-k)f_t+(t,x,u)-\varphi_i(t,x,k)f_{x_i}-$$
$$-(\varphi_{ix_i}(t,x,k)+\psi(t,x,u))f\}\,dx\,dt\geqslant 0;$$

2) Существует множество $\mathfrak{H}_0\subset[0,T]$ меры нуль такое, что для $t\in[0,T]\setminus\mathfrak{H}_0$ функция $u(t,x)$ почти всюду в Ω определена и

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\in[0,T]\setminus\mathfrak{H}_0}}\int_\Omega |u(t,x)-u_0(x)|\,dx=0;$$

3) Пусть S_ρ — граница области $\Omega_\rho=\{x\in\Omega,\ \operatorname{dist}(x,\partial\Omega)\geqslant\rho\}$ и нормальная кривизна $\partial\Omega$ по абсолютной величине ограничена константой $K>0$. Тогда существует такое множество Σ меры нуль на отрезке $[0,K^{-1}]$, что

$$\lim_{\substack{\rho\to 0\\ \rho\in[0,K^{-1}]\setminus\Sigma}}\int_0^T\int_{S_\rho}|u(t,x)-u_1(t,x)|\,dS\,dt=0.$$

Теорема 3. *Пусть $u(t,x)$, $v(t,x)$ являются обобщенными решениями задачи* (1), (6) *с начальными и граничными функциями $u_0(x)$, $u_1(t,x)$ и $v_0(x)$, $v_1(t,x)$ соответственно. Пусть $|u(t,x)|\leqslant M$, $|v(t,x)|\leqslant M$.*

Тогда при условиях (7), (8) *имеет место оценка*

$$\int_\Omega|u(\tau,x)-v(\tau,x)|\,dx\leqslant e^{\gamma\tau}\Big\{\int_\Omega|u_0(x)-v_0(x)|\,dx+$$

$$+c(\partial\Omega)\cdot N\int_0^T\int_{\partial\Omega}|u_1(t,x_S)-v_1(t,x_S)|\,dS\,dt\Big\}. \tag{9}$$

для почти всех $\tau\in[0,T]$; $c(\partial\Omega)$ — постоянная, зависящая от свойств границы $\partial\Omega$.

Очевидно, из теоремы 3 следует единственность решения задачи (1), (6).

Теорема существования решения доказывается при условии гладкости функций $\varphi_i(t,x,u)$, $\psi(t,x,u)$, $u_1(t,x)$ и при естественном предположении, что для любых $(t,x_S)\in[0,T]\times\partial\Omega$, $|u|\leqslant M$

$$\sum_{i=1}^n\varphi_{iu}(t,x_S,u)\,n_i(x_S)\geqslant\alpha=\mathrm{const}>0,$$

где $n_i(x_S)$ — компоненты внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке x_S. Доказательство проводится методом введения «исчезающей» вязкости: решение $u(t,x)$ задачи (1), (6) получается как предел при $\varepsilon\to0$ решений $u^\varepsilon(t,x)$ первой краевой задачи для квазилинейного параболического уравнения

$$u_t+\sum_{i=1}^n(\varphi_i(t,x,u))_{x_i}+\psi(t,x,u)=\varepsilon\Delta u,\quad \varepsilon\in(0,1). \tag{10}$$

Устанавливаются равномерные по ε оценки модулей непрерывности в L_1 решений задачи (10), (6). Из этих оценок следует компактность семейства $\{u^\varepsilon(t,x)\}$ в метрике $L_1(Q_T)$; принимая во внимание теорему единственности решения задачи (1), (6), получаем сходимость последовательности $\{u^\varepsilon(t,x)\}$ при $\varepsilon\to0$ к обобщенному решению задачи (1), (6).

Следующая лемма существенно используется при доказательстве того, что предельная функция принимает краевые данные.

Лемма 2. *Пусть в $Q_T\cap(t<T)$ функция $g(t,x)$ непрерывна и удовлетворяет уравнению*

$$g_t+\sum_{i=1}^n a_i(t,x)g_{x_i}+\varepsilon\Delta g=b(t,x),\quad \varepsilon\in(0,1),$$

где $a_i(t,x)$, $i=1,2,\ldots,n$, и $b(t,x)$ — ограниченные функции в Q_T. Пусть $g(t,x)\equiv0$ при $(t,x)\in[0,T)\times\partial\Omega$, а $g(T,x)\in C^\infty$, $|g(T,x)|\leqslant1$. Пусть при

$t<T$ функция $g(t, x)$ имеет непрерывные производные по x_i на боковой границе $[0, T]\times\partial\Omega$ цилиндра Q_T. Тогда

$$\left|\frac{\partial g}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} \leqslant \frac{\text{const}}{\varepsilon(T-t)^{1/2}},$$

где n — внутренняя нормаль к $\partial\Omega$, а const — постоянная, не зависящая от ε.

Замечание 1. Из этих результатов, опираясь на оценки для решений задачи Коши, установленные в ([13]), нетрудно доказать теорему существования решения задачи (1), (6) для случая произвольных ограниченных измеримых функций $u_0(x)$ и $u_1(t, x)$.

Замечание 2. Недавно в работе ([15]) были анонсированы близкие результаты в классе функций с ограниченной вариацией.

В заключение я приношу благодарность проф. С. Н. Кружкову за постановку задач и ценные советы.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
4 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *E. Hopf*, Comm. Pure Appl. Math., v. 3, № 3, 201 (1950). [2] *О. А. Олейник*, ДАН, т. 95, № 3 (1954). [3] *P. Lax*, Comm. Pure Appl. Math., v. 7, № 1, 159 (1954). [4] *А. Н. Тихонов, А. А. Самарский*, ДАН, т. 99, № 1, 27 (1954). [5] *О. А. Олейник, Н. О. Введенская*, ДАН, т. 113, № 3, 503 (1957). [6] *О. А. Олейник*, УМН, т. 12, № 3, 3 (1957). [7] *И. М. Гельфанд*, УМН, т. 14, № 2, 87 (1959). [8] *А. С. Калашников*, ДАН, т. 127, № 1, 27 (1959). [9] *Н. С. Бахвалов*, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 6, № 3, 521 (1966). [10] *С. Н. Кружков*, УМН, т. 20, № 6, 112 (1965). [11] *Н. Н. Кузнецов*, Матем. заметки, т. 2, № 4, 401 (1967). [12] *С. Н. Кружков*, ДАН, т. 187, № 1, 29 (1969). [13] *С. Н. Кружков*, Матем. сб., т. 81, № 2, 217 (1970). [14] *А. И. Вольперт*, Матем. сб., т. 73, № 2, 255 (1967). [15] *Э. Б. Быховский*, ДАН, т. 215, № 1, 17 (1974).