

УДК 513.6

МАТЕМАТИКА

Академик АН БССР В. П. ПЛАТОНОВ, В. П. ЯНЧЕВСКИЙ

О ГИПОТЕЗЕ ХАРДЕРА

Пусть Δ — некоммутативное тело конечной размерности m^2 над центром k , Nrd — приведенная норма Δ над k (см. (1, 2)). Через $\text{SL}(1, \Delta)$ обозначается подгруппа мультипликативной группы Δ^* , состоящая из элементов с единичной приведенной нормой, т. е. $\text{SL}(1, \Delta) = (x \in \Delta \mid \text{Nrd}(x) = 1)$. Другими словами, $\text{SL}(1, \Delta)$ — «одномерная» специальная линейная группа над Δ . Проблема изучения структуры группы $\text{SL}(1, \Delta)$ имеет важное значение как с точки зрения разнообразных применений, так и в соответствии с классическими традициями в теории групп. Однако в настоящее время мы располагаем очень незначительными сведениями о строении группы $\text{SL}(1, \Delta)$ даже для наиболее употребительных полей, не говоря уже о произвольных полях k , для которых изучение $\text{SL}(1, \Delta)$ представляется пока нереальным.

Наиболее естественным классом полей k , для которых выяснение структуры $\text{SL}(1, \Delta)$ играет важную роль, является класс локальных полей (т. е. полных дискретно нормированных полей) с совершенным полем вычетов \bar{k} . Если к тому же кохомологическая размерность \bar{k} (см. (3)) не превосходит единицы, $\text{cd}(\bar{k}) \leq 1$, то для таких полей k Хардером (4) высказана интересная гипотеза: если F — нормальный делитель $\text{SL}(1, \Delta)$, порожденный максимальным тором T , соответствующим неразветвленному максимальному подполю $L \subset \Delta$ (т. е. $T = \text{SL}(1, \Delta) \cap L = (x \in L \mid N_{L/k}(x) = 1)$, где $N_{L/k}$ — символ нормы L над k), то $F = \text{SL}(1, \Delta)$. Отметим, что Δ всегда обладает неразветвленными максимальными подполями (см. (8), гл. 12).

Основной целью настоящей статьи является доказательство гипотезы Хардера, причем в более общей ситуации. В действительности, условие неразветвленности L оказывается необходимым для совпадения F и $\text{SL}(1, \Delta)$. Попутно устанавливается, что для рассматриваемых полей каждый элемент группы $\text{SL}(1, \Delta)$ есть произведение не более двух коммутаторов группы Δ^* , в частности, $\text{SL}(1, \Delta) = [\Delta^*, \Delta^*]$ (гипотеза Тавнака — Артина: см. (5, 6)). Это обобщает результат Ванга (7) для поля p -адических чисел.

Если v — дискретное нормирование k , то существует, притом единственное, нормирование v' тела Δ , продолжающее v . Оно определяется так: $\forall \delta \in \Delta \quad v'(\delta) = [v(\text{Nrd } \delta)]^{1/m}$.

Через \mathfrak{O}_Δ обозначим кольцо целых элементов Δ , \mathfrak{P} — простой идеал \mathfrak{O}_Δ , $\bar{\Delta} = \mathfrak{O}_\Delta / \mathfrak{P}$ — тело вычетов, π — простой элемент в \mathfrak{P} . Для всякого $\delta \in \mathfrak{O}_\Delta$ через $\bar{\delta}$ обозначается образ в $\bar{\Delta}$. Заметим, что $\text{SL}(1, \Delta) \subset \mathfrak{O}_\Delta^*$. Для произвольного максимального подполя $L \subset \Delta$ обозначим $T_L = \text{SL}(1, \Delta) \cap L$.

Теорема 1. Если тело вычетов $\bar{\Delta}$ коммутативно, то нормальный делитель F_L группы $\text{SL}(1, \Delta)$, порожденный T_L , тогда и только тогда совпадает с $\text{SL}(1, \Delta)$, когда максимальное подполе L неразветвлено над k .

В частности, если $\text{cd}(\bar{k}) \leq 1$ (\bar{k} — поле вычетов k), то тело вычетов $\bar{\Delta}$ коммутативно и гипотеза Хардера справедлива, причем условие неразветвленности L необходимо.

Теорема 2. Если тело вычетов $\bar{\Delta}$ коммутативно, то всякий элемент из $\text{SL}(1, \Delta)$ есть произведение не более двух коммутаторов группы Δ^* , в частности, $\text{SL}(1, \Delta) = [\Delta^*, \Delta^*]$.

З а м е ч а н и е 1. Если тело вычетов $\bar{\Delta} = \mathfrak{D}_{\Delta} \in \mathfrak{F}$ некоммутативно, то теорема 1, вообще говоря, не верна. Вопрос о справедливости теоремы 2 в этом случае остается открытым.

Доказательства теорем опираются на два следующие утверждения, имеющие и самостоятельное значение.

П р е д л о ж е н и е 1. Пусть \bar{Z} — центр тела $\bar{\Delta}$.

Тогда \bar{Z} — циклическое расширение \bar{k} степени e , где e — индекс ветвления Δ . Если $\bar{\Delta}$ — коммутативно, то тело Δ циклично над k и все неразветвленные максимальные подполя Δ циклически и сопряжены.

П р е д л о ж е н и е 2. Пусть Ω — конечное сепарабельное расширение произвольного поля P .

Тогда существует такой элемент $\omega_0 \in \Omega$, что $N_{\Omega/P}(\omega_0) = 1$ и $P(\omega_0) = \Omega$.

З а м е ч а н и е 2. Легко видеть, что условие сепарабельности Ω существенно. Если, например, Ω чисто несепарабельно, то $N_{\Omega/P}(\omega) = 1 \Leftrightarrow \omega = 1$. Из доказательства предложения 2, которое довольно необычно, будет следовать более любопытное: все зависит от того, будет ли $\Omega^{(1)} = (x \in \Omega | N_{\Omega/P}(x) = 1)$ задавать P -определенное многообразие.

Д о к а з а т е л ь с т в о п р е д л о ж е н и я 1. Ограничимся основным случаем, когда $\bar{\Delta}$ коммутативно. В общем случае рассуждения совершенно аналогичны. Тогда $\bar{\Delta} = \bar{Z}$ и хорошо известно, что $[\bar{\Delta} : \bar{k}] = m$. Если π — простой элемент \mathfrak{D}_{Δ} , то отображение $\varphi: x \rightarrow \pi x \pi^{-1}$ индуцирует естественным образом автоморфизм $\bar{\varphi}: \bar{\Delta} \rightarrow \bar{\Delta}$, ибо $\pi \mathfrak{F} \pi^{-1} = \mathfrak{F}$. Циклическость $\bar{\Delta}$ над \bar{k} эквивалентна, как нетрудно видеть, следующему: $\bar{\varphi}^d \neq 1$, $0 < d < m$, т. е. автоморфизм $\bar{\varphi}$ имеет порядок m . Последнее утверждение мы и будем доказывать. Используя разложимость произвольного тела в кронекерово произведение тел примарных взаимно простых индексов, можно редуцировать доказательство к случаю тела Δ примарного индекса: $m = q^t$, где q — простое число.

Предположим, что $\bar{\varphi}^d = 1$, $0 < d < m$. Тогда поле инвариантов \bar{M} автоморфизма $\bar{\varphi}$ в $\bar{\Delta}$ отлично от \bar{k} . Пусть \bar{M} содержит подполе \bar{R} , над которым \bar{M} циклично. Через $\bar{\sigma}$ обозначим образующую группы $\text{Gal}(\bar{M}/\bar{R})$. Так как все конечные расширения поля \bar{k} сепарабельны ввиду совершенности \bar{k} , то из построения $\bar{\Delta}$ и леммы Гензеля следует, что \bar{M} , \bar{R} и $\bar{\sigma}$ поднимаются соответственно до M , R , σ , где M и R — неразветвленные подполя Δ , причем M циклично над R и σ — образующая группы $\text{Gal}(M/R)$. По теореме Сколема — Нётер существует $\delta \in \Delta^*$, что $\delta \mu \delta^{-1} = \sigma(\mu)$ для всякого $\mu \in M$. Но $\delta = \pi^{\alpha} \delta_{\mathfrak{D}}$, где $\delta_{\mathfrak{D}}$ — единица \mathfrak{D}_{Δ} . Так как $\bar{\Delta}$ — поле, то автоморфизм $\bar{\Delta}$, индуцируемый $\varphi_{\delta_{\mathfrak{D}}}: x \rightarrow \delta_{\mathfrak{D}} x \delta_{\mathfrak{D}}^{-1}$, является тождественным. Так как $\varphi_{\pi^{\alpha}}$ также индуцирует на \bar{M} тождественный автоморфизм, то $\bar{\varphi}_{\delta} = \bar{\sigma}$ является тождественным на \bar{M} . Противоречие. Следовательно, автоморфизм $\bar{\varphi}$ имеет порядок m и $\bar{\Delta}$ циклично над \bar{k} .

Теперь надо показать, что общий случай действительно сводится к рассмотренному, когда \bar{M} обладает подполем \bar{R} . Обозначим через Γ конечное нормальное расширение \bar{k} , содержащее $\bar{\Delta}$. Пусть S_q — силовская q -подгруппа группы $\text{Gal}(\bar{\Gamma}/\bar{k})$, $\bar{\Sigma}$ — подполе инвариантов S_q в $\bar{\Gamma}$. Очевидно, что $(q, [\bar{\Sigma} : \bar{k}]) = 1$. Тогда поле $\bar{\Delta}\bar{\Sigma}$ обладает башней подполей с циклическими этажами степени q , проходящей через $\bar{M}\bar{\Sigma}$. Значит, $\bar{M}\bar{\Sigma}$ обладает истинным подполем \bar{R} , над которым оно циклично, $\bar{\Sigma}$ поднимается до неразветвленного расширения $\Sigma \supseteq k$. Тело $\Delta_{\Sigma} = \Delta \otimes_{\bar{k}} \Sigma$ уже соответствует рассмотренной выше ситуации, и автоморфизм $\bar{\varphi}_{\Sigma}$, индуцируемый простым элементом $\mathfrak{D}_{\Delta_{\Sigma}}$, в действительности является продолжением автоморфизма $\bar{\varphi}$. Тем самым первое утверждение предложения 1 доказано. Остальные вытекают из него, так как неразветвленное расширение поля \bar{k} определяется своим полем вычетов с точностью до k -эквивалентности.

Доказательство предложения 2. Обозначим $\Omega^{(1)} = \text{Ker } N_{\alpha/P}$. Прежде всего заметим, что $P(\Omega^{(1)}) = \Omega$. Если поле P конечно, то это следует из подсчета порядков. Для бесконечного поля P рассуждение менее стандартно: надо считать размерности алгебраических многообразий. Так как Ω — сепарабельное расширение, то $\Omega^{(1)}$ задает естественным образом P -определенное алгебраическое многообразие, точнее P -определенный алгебраический тор. Так как $\Omega^{(1)}$ унирационально над P , то $\dim_P \Omega^{(1)} = \deg(\Omega/P) - 1$ и $P(\Omega^{(1)}) = \Omega$, ибо $\dim_P D < \deg(\Omega/P) - 1$ для всякого истинного подполя $D \supset P$.

Если P — алгебраическое расширение конечного поля, то ввиду конечности $[\Omega : P]$ достаточно рассмотреть случай конечного поля. Но тогда $\Omega^{(1)}$ — циклическая группа и в качестве ω_0 можно взять ее порождающий элемент.

Пусть теперь P не является алгебраическим расширением конечного поля. Тогда всякий P -определенный тор обладает над P плотными циклическими подгруппами (см. (9)). В частности, в $\Omega^{(1)}$ существует элемент ω_0 , порождающий циклическую подгруппу, плотную в топологии Зарисского. Так как поле $P(\omega_0)$ замкнуто в P -топологии Зарисского, то $\bar{P}(\omega_0) = P(\Omega^{(1)}) = \Omega$. Предложение 2 доказано.

Доказательства теорем. Для всякого $b \in \bar{\Delta}^{(1)} = (x \in \bar{\Delta} / \bar{N}_{\bar{\Delta}/\bar{k}}(x) = 1)$ существует такой элемент $a \in \text{SL}(1, \Delta)$, что $\bar{a} = b$. Это следует обычным образом из леммы Гензеля, если учесть, что для неразветвленного максимального подполя L поле вычетов $\bar{L} = \bar{\Delta}$ и при $a \in L$ всегда $\bar{\text{Nrd}}(a) = \bar{N}_{L/\bar{k}}(a) = \bar{N}_{\bar{\Delta}/\bar{k}}(\bar{a})$.

Если максимальное подполе L разветвлено над k , то $\bar{L} \neq \bar{\Delta}$. Тогда, как и в предложении 2, нетрудно видеть, что $\bar{T}_L \neq \bar{\Delta}^{(1)}$. Пусть Θ_L — канонический прообраз \bar{T}_L . По построению, $F_L \subseteq \Theta_L \cap \text{SL}(1, \Delta)$, причем $\Theta_L \cap \text{SL}(1, \Delta) \neq \text{SL}(1, \Delta)$, так как $\bar{\text{SL}}(1, \bar{\Delta}) \cong \bar{\Delta}^{(1)}$. Следовательно, $F_L \neq \text{SL}(1, \Delta)$.

Пусть теперь L — неразветвленное максимальное подполе Δ . Тогда $\bar{L} = \bar{\Delta}$ и по предложению 2 существует такой элемент $\Theta \in T_L = L^{(1)}$, что $L = k(\Theta)$, $\bar{L} = \bar{\Delta} = \bar{k}(\bar{\Theta})$.

Для произвольного элемента $a \in \text{SL}(1, \Delta)$ рассмотрим $b = a\Theta$. Тогда $\bar{k}(b) = \bar{\Delta}$. Действительно, если $\bar{k}(b) \neq \bar{\Delta}$, то $\bar{\Delta} = \bar{k}(\bar{a})\bar{k}(b)$ и группа Галуа $\text{Gal}(\bar{\Delta}/\bar{k}) \subset \text{Gal}(\bar{k}(b)/\bar{k}) \times \text{Gal}(\bar{k}(\bar{a})/\bar{k})$, что невозможно, ибо $\text{Gal}(\bar{\Delta}/\bar{k})$ — циклическая группа порядка m . Так как $\bar{k}(b) = \bar{\Delta}$, то $k(b)$ — неразветвленное максимальное подполе Δ . Из предложения 1 вытекает, что $k(b)$ и L сопряжены в Δ . Значит, существует такое $\delta \in \Delta^*$, что $b \in \delta T_L \delta^{-1}$. Но L циклично над k , поэтому всякий элемент T_L есть коммутатор в Δ^* . Это немедленно следует из теоремы 90 Гильберта: если $t \in T_L$ и σ — образующий элемент группы $\text{Gal}(L/k)$, то $t = \sigma(x)x^{-1}$ для некоторого $x \in L$; по теореме Сколема — Нётер $\exists g \in \Delta^*$, что $\sigma(x) = gxg^{-1}$, значит, $t = gxg^{-1}x^{-1}$. Ясно, что b также является коммутатором, поэтому $a = b\Theta^{-1}$ всегда представляется в виде произведения двух коммутаторов. Тем самым доказана теорема 2.

Для завершения доказательства теоремы 1 достаточно показать, что всегда можно выбрать $\delta \in \text{SL}(1, \Delta)$, т. е. неразветвленное максимальное подполе Δ сопряжены посредством элементов из $\text{SL}(1, \Delta)$. Так как Δ — циклическая алгебра, то можно считать, что $\pi L \pi^{-1} = L$, в частности, сопрягающий элемент δ можно выбрать в \mathfrak{D}_Δ^* . Существует такой элемент $\alpha \in L$, что $\bar{\alpha} = \bar{\delta}$, поэтому $\delta = \tau\alpha$, где $\tau \equiv 1 \pmod{\pi}$. Так как при умножении δ справа на элементы из L^* он остается сопрягающим, то выберем по предложению 2 в качестве α такой элемент из L^* , что $N_{L/\bar{k}}(\alpha) = 1$ и $L = k(\alpha)$. Ясно, что $\bar{L} = \bar{\Delta} = \bar{k}(\bar{\alpha})$, где $N_{\bar{\Delta}/\bar{k}}(\bar{\alpha}) = 1$. Как уже отмечалось выше, $k(\delta) = \Phi$ — неразветвленное максимальное расширение k .

$$\begin{aligned} \overline{\text{Nrd}}(\delta) &= \overline{\text{Nrd}}(\tau\alpha) = \overline{\text{Nrd}}_{\Phi/k}(\tau\alpha) = \overline{\text{Nrd}}_{\bar{\Delta}/\bar{k}}(\tau\alpha) = \\ &= \overline{\text{Nrd}}_{\bar{\Delta}/\bar{k}}(\bar{\tau}\bar{\alpha}) = \overline{\text{Nrd}}_{\bar{\Delta}/\bar{k}}(\bar{\alpha}) = 1, \quad \bar{\tau} = 1 (!). \end{aligned}$$

Следовательно, $\text{Nrd}(\delta) \equiv 1 \pmod{p}$, где p — простой элемент \mathfrak{O}_k . Тогда существует такой элемент $\gamma \in L^*$, что $N_{L/k}(\gamma) = \text{Nrd}(\delta)$ (⁸), стр. 90). Но $N_{L/k}(\gamma) = \text{Nrd}(\gamma)$, поэтому $\text{Nrd}(\delta\gamma^{-1}) = 1$ и $\delta_1 = \delta\gamma^{-1}$ — сопрягающий элемент. Теорема 1 полностью доказана.

Отметим, что из теоремы 1 следуют новые факты о слабой аппроксимации в алгебраических группах над дискретно нормированными полями (см. (⁴)). Было бы весьма интересно получить аналог теоремы 1 над алгебраическими числовыми полями k . Существует гипотеза о простоте $\text{SL}(1, \Delta)$ (¹⁰), которая пока непрístupна даже для тела кватернионов.

Институт математики
Академии наук БССР
Минск

Поступило
9 VIII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Бурбаки, Алгебра: модули, кольца, формы, М., 1966. ² А. Вейль, Основы теории чисел, М., 1972. ³ Ж. П. Серр, Когомологии Галуа, М., 1968. ⁴ G. Harder, Arch. Math., v. 19, № 5, 465 (1968). ⁵ X. Басс, Алгебраическая K-теория, М., 1973. ⁶ В. П. Платонов, В. И. Янчевский, ДАН, т. 208, № 3, 541 (1973). ⁷ S. Wang, Am. J. Math., v. 72, № 3, 323 (1950). ⁸ J. P. Serre, Corps Locaux, Paris, 1962. ⁹ J. Tits, Lectures on Algebraic Groups, Yale University, 1969. ¹⁰ В. П. Платонов, Алгебраические группы, Алгебра. Топология, Геометрия, Итоги науки, т. 11, в. 5 (1974).