Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 3

УДК 518:517.948

МАТЕМАТИКА

В. А. ВИНОКУРОВ, Ю. И. ПЕТУНИН, А. Н. ПЛИЧКО

УСЛОВИЯ ИЗМЕРИМОСТИ И РЕГУЛЯРИЗУЕМОСТИ ОТОБРАЖЕНИЙ, ОБРАТНЫХ К НЕПРЕРЫВНЫМ ЛИНЕЙНЫМ ОТОБРАЖЕНИЯМ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 25 VI 1974)

Пусть E и F — два топологических пространства и $\mathfrak{A}(E)$, $\mathfrak{A}(F)$ — σ-алгебры борелевских множеств пространств E и F. Отображение A: $E\to F$ считается измеримым, если прообраз $A^{-1}(S)$ борелевского множества $S\in\mathfrak{A}(F)$ принадлежит σ-алгебре $\mathfrak{A}(E)$. Простейшим примером измеримых отображений являются B-измеримые отображения первого класса, т. е. отображения A: $E\to F$, для которых прообраз каждого открытого множества $U\subset F$ представляет множество типа E_σ — счетное объединение замкнутых множеств.

Отображение A, действующее из метрического пространства E в метрическое пространство F, называется регуляризуемым по Тихонову (см. ([1])), если существует однопараметрическое семейство отображений R_δ: $E\to F$, $0<\delta<\delta_0$, такое, что для любого $x\in E$

$$\lim_{\delta\to 0}\Delta(R_\delta, \delta, x)=0,$$

где

$$\Delta(R_\delta, \delta, x)=\sup_{\{x'\in E:\ \rho(x, x')<\delta\}}\rho(R_\delta(x'), A(x)).$$

Оказывается (см. ([1])), что в случае сепарабельного метрического пространства F регуляризуемость отображения A: $E\to F$ эквивалентна принадлежности отображения к первому классу.

Теорема 1. *Пусть E — сепарабельное банахово пространство, F — отделимое топологическое векторное пространство и A — непрерывный линейный оператор с нулевым ядром, действующий из E на F.*

Тогда обратный оператор A^{-1} будет измеримым линейным отображением, действующим из F на E.

Теорема 2. *Пусть E — произвольное рефлексивное банахово пространство, F — отделимое локально-выпуклое пространство. Обратное отображение A^{-1} к непрерывному линейному отображению A с нулевым ядром, действующему из E на F, всегда измеримо.*

Условия теоремы 1 и теоремы 2 весьма существенны: если эти условия не выполняются, то, как показывает следующее утверждение, отображение A^{-1} может быть неизмеримым.

Теорема 3. *Пусть E — несепарабельное банахово пространство, которое является сопряженным к некоторому сепарабельному банахову пространству.*

Тогда существует такое непрерывное линейное отображение A, действующее из пространства E на предгильбертово пространство F, что обратное отображение A^{-1}: $F\to E$ неизмеримо.

При доказательстве теоремы 3 использована модель теории множеств с условием $2^{\aleph_1}>c$, где $\aleph_1$ — наименьшее несчетное кардинальное число, c — мощность континуума (эта аксиома слабее гипотезы континуума). Следует отметить, что условие $2^{\aleph_1}>c$ выполняется не для всякой модели теории множеств; например, если справедлива A-аксиома Д. Мартина (см. ([2])), то $2^{\aleph_0}=2^{\aleph_1}=c$.

Если A — линейное отображение из векторного пространства E в топологическое векторное пространство F с топологией $\mathcal{T}$, то символ $A^{-1}(\mathcal{T})$ будет использован для обозначения прообраза топологии $\mathcal{T}$ относительно отображения A (см. ([3]), стр. 39).

Лемма. *Пусть A — непрерывный линейный оператор с нулевым ядром, действующий из сепарабельного банахова пространства E в отделимое топологическое векторное пространство F с топологией $\mathcal{T}$. Для того чтобы обратный оператор A^{-1} был B-измеримым отображением первого класса, необходимо и достаточно, чтобы замыкание $\bar{S}_1$ единичного шара S_1 пространства E в топологии $A^{-1}(\mathcal{T})$ являлось ограниченным множеством в метрике пространства E.*

При доказательстве леммы используются рассуждения, изложенные в работе ([4]).

Для исследования регуляризуемости отображения A^{-1}, которое является обратным к непрерывному линейному отображению A, действующему из банахова пространства E в нормированное пространство F, введем на пространстве E новую норму по формуле

$$\|x\|^*=\|Ax\|_E.$$

Так как A — ограниченный линейный оператор, то норма $\|x\|^*$ слабее исходной нормы пространства E. Отсюда и из условия $\operatorname{Ker} A=\{\theta\}$ следует, что сопряженное пространство E_*' к нормированному пространству E_*, наделенному нормой $\|x\|^*$, вложено в пространство E' и является там всюду плотным в слабой топологии $\sigma(E', E)$ линейным многообразием.

Подпространство $M\subset E'$, всюду плотное в слабой топологии $\sigma(E', E)$, называется подпространством с нулевой характеристикой, если норма

$$\|x\|_0=\sup_{f\in M,\ f\neq\theta}\frac{|f(x)|}{\|f\|}$$

не эквивалентна исходной норме пространства E. В противном случае говорят, что характеристика M отлична от нуля (см. ([5])). Как известно (см. ([5])), подпространство M имеет нулевую характеристику тогда и только тогда, когда замыкание единичного шара S_1 пространства E в топологии $\sigma(E, M)$ не ограничено по норме E. В случае $M=E_*'$ последнее утверждение эквивалентно следующему условию: замыкание $\bar{S}_1$ шара S_1 в норме $\|x\|^*$ является ограниченным множеством в метрике пространства E (см. ([6])).

Теорема 4. *Пусть E — сепарабельное банахово пространство, F — нормированное пространство и A — непрерывный линейный оператор с нулевым ядром, действующим из E на F. Обратный оператор A^{-1} будет регуляризуем по Тихонову тогда и только тогда, когда характеристика подпространства $E_*'\subset E'$ отлична от нуля.*

Замечание. Поскольку подпространства характеристики нуль встречаются в приложениях крайне редко, то теорема 4 показывает, что условие регуляризуемости оператора A^{-1} является весьма общим.

Напомним, что банахово пространство E называется квазирефлексивным, если $\dim E''/E=n<\infty$, где E'' — второе сопряженное к пространству E. Как известно (см. ([6])), в сопряженном пространстве к квазирефлексивному характеристика любого подпространства, всюду плотного в слабой топологии, отлична от нуля. Поэтому справедливо

Следствие 1. *Если в условиях теоремы 4 E — квазирефлексивное (рефлексивное) сепарабельное банахово пространство, то оператор A^{-1} всегда регуляризуем по Тихонову.*

Так как на каждом неквазирефлексивном банаховом пространстве E можно ввести более слабую норму $\|x\|^*$ так, что замыкание единичного шара S_1 будет неограниченным множеством пространства E (см. ([7, 8])), то, используя в несепарабельном случае результаты работ ([4], [9]), можно утверждать следующее.

Теорема 5. *Пусть E — неквазирефлексивное банахово пространство; тогда существует нормированное пространство F и непрерывный линейный оператор A: $E \to F$ с нулевым ядром, для которого обратный оператор A^{-1} не первого класса и, следовательно, нерегуляризуем.*

Теорема 6. *Если E — произвольное рефлексивное банахово пространство и A — непрерывное линейное отображение с нулевым ядром, действующее из E на нормированное пространство F, то обратное отображение A^{-1} регуляризуемо и, следовательно, является функцией первого класса.*

Нормируемость пространства F здесь по существу, поскольку справедлива

Теорема 7. *Для всякого несепарабельного банахова пространства E существует отделимое локально-выпуклое пространство F и непрерывный линейный оператор A, действующий из E в F с нулевым ядром, такой, что отображение A^{-1} не принадлежит первому классу.*

Однако остается открытым вопрос о справедливости теоремы 6 для квазирефлексивного пространства E.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
17 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. А. Винокуров*, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 5, 3 (1971). [2] *D. Martin, R. Solovay*, Ann. Math. Logic, Amsterdam, v. 2, N 2, 143 (1970). [3] *Н. Бурбаки*, Общая топология. Основные структуры, М., 1958. [4] *Л. Г. Афанасьева, Ю. И. Петунин*, Тр. Инст. матем. Воронежск. гос. унив., в. 1, 3 (1970). [5] *J. Dixmier*, Duke Math. J., v. 15, 1057 (1948). [6] *Ю. И. Петунин*, ДАН, т. 154, № 3 (1964). [7] *А. Н. Пличко*, Докл. АН УССР, сер. А, № 5, 406 (1974). [8] *W. Davis, J. Lindenstrawss*, Proc. Am. Math. Soc., v. 31, 109 (1972). [9] *В. А. Винокуров*, ДАН, т. 220, № 2 (1975).