

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

Н. С. ВЯЧЕСЛАВОВ

О РАВНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ $|x|$ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ *

(Представлено академиком В. С. Владимировым 20 VI 1974)

Вслед за работой А. Лебега ⁽¹⁾, вскрывшей особую роль функции $|x|$ в теории приближения непрерывных функций полиномами и рациональными функциями, появились работы Ш.-Ж. Валле-Пуссена, Д. Джексона и С. Н. Бернштейна, посвященные оценкам скорости убывания наименьших равномерных уклонений $E_n(|x|, [-1, 1])$ функции $|x|$ от алгебраических полиномов степени не выше n . В результате был найден точный порядок убывания $E_n(|x|, [-1, 1])$:

$$E_n(|x|, [-1, 1]) \asymp 1/n.$$

Для наименьших равномерных уклонений $R_n(|x|, [-1, 1])$ функции $|x|$ от рациональных функций степени не выше n в 1964 г. неожиданные оценки получил Д. Ньюмэн ⁽²⁾:

$$1/2 \exp(-9\sqrt{n}) < R_n(|x|, [-1, 1]) < 3 \exp(-\sqrt{n}).$$

Вслед за этим начали появляться работы, в которых результат Ньюмэна успешно применялся для получения так называемых прямых теорем теории аппроксимации рациональными функциями со свободными полюсами (таких теорем до появления работы Д. Ньюмэна просто не было).

Эти оценки были уточнены А. А. Гончаром ⁽³⁾:

$$\exp\{-\pi(\sqrt{2}+\varepsilon)\sqrt{n}\} < R_n(|x|, [-1, 1]) < \exp\{-1/2\pi(\sqrt{2}-\varepsilon)\sqrt{n}\}$$

для любого $\varepsilon > 0$ и $n > n(\varepsilon)$.

Существенное продвижение в нахождении порядка убывания $R_n(|x|, [-1, 1])$ было сделано А. П. Булановым ⁽⁴⁾:

$$\exp\{-\pi\sqrt{n+1}\} \leq R_n(|x|, [-1, 1]) < \exp\{-\pi\sqrt{n}(1-O(n^{-1/4}))\}.$$

В работе ⁽⁵⁾ оценка сверху для $R_n(|x|, [-1, 1])$ усилена до $R_n(|x|, [-1, 1]) < An \exp\{-\pi\sqrt{n}\}$, $A = \text{const} > 0$. Ниже эта оценка усиливается до $R_n(|x|, [-1, 1]) < C \exp\{-\pi\sqrt{n}\}$, $C = \text{const} > 0$; вместе с оценкой А. П. Буланова это позволяет высказать следующее утверждение.

Т е о р е м а. $R_n(|x|, [-1, 1]) \asymp e^{-\pi\sqrt{n}}$.

Приступаем к доказательству оценки сверху.

1°. Л е м м а 1.** Пусть $t \geq 2$, $\xi = \exp(-1/t)$, $z \geq 2$, v целое, $v \geq t \ln z$. Тогда справедливо неравенство

$$\prod_{k=0}^{v-1} \frac{1-\xi^{k+1/2}}{1+\xi^{k+1/2}} < 2 \exp\left\{-\frac{\pi^2}{4}t+2, 1\frac{t}{z}\right\}. \quad (1)$$

* Работа выполнена под руководством Е. П. Долженко. Ему и А. П. Буланову автор выражает свою искреннюю благодарность за помощь.

** При $z=t$ получаем лемму 1 работы ⁽⁵⁾, которая, в свою очередь, является аналогом леммы 1 А. П. Буланова ⁽⁶⁾.

Доказательство.

$$\exp\left\{\sum_{h=0}^{v-1} \ln \frac{1-\xi^{h+1/2}}{1+\xi^{h+1/2}}\right\} = \exp\left\{-2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2s-1} \sum_{h=0}^{v-1} \xi^{(h+1/2)(2s-1)}\right\} <$$

$$< \exp\left\{-2 \sum_{s=1}^{2[t]} \frac{1}{2s-1} (1-\xi^{v(2s-1)}) / (\xi^{-(2s-1)/2} - \xi^{(2s-1)/2})\right\} = \exp\{A_1 + A_2\}, \quad (2)$$

где

$$A_1 = -2t \sum_{s=1}^{2[t]} \frac{1}{(2s-1)^2} \frac{2s-1}{t} / \left(\exp\left(\frac{2s-1}{2t}\right) - \exp\left(-\frac{2s-1}{2t}\right) \right),$$

$$A_2 = 2t \sum_{s=1}^{2[t]} \frac{1}{(2s-1)^2} \frac{2s-1}{t} \xi^{v(2s-1)} / \left(\exp\left(\frac{2s-1}{2t}\right) - \exp\left(-\frac{2s-1}{2t}\right) \right).$$

Для оценки величин A_1, A_2 нам понадобятся два неравенства:

$$2t \sum_{s=2[t]+1}^{\infty} \frac{1}{(2s-1)^2} < 2t \int_{2[t]}^{\infty} \frac{dz}{(2z-1)^2} =$$

$$= \frac{t}{4[t]-1} < \frac{[t]+1}{4[t]-1} < 0,43, \quad t \geq 2, \quad (3)$$

$$1 - 0,06x^2 < x / (\exp(x/2) - \exp(-x/2)) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x) \quad (<1), \quad 0 < x < 4. \quad (4)$$

Последнее неравенство доказывается так:

$$\varphi(x) = x / \left(2 \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(2h+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2h+1} \right) = 1/(1+y),$$

$$y \stackrel{\text{def}}{=} x^2 \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^{2h-2}}{(2h+1)! 2^{2h}} < x^2 \sum_{h=1}^{\infty} \frac{4^{2h-2}}{(2h+1)! 2^{2h}} = \frac{1}{32} (\text{sh } 2 - 2) x^2 < 0,06x^2;$$

так как $1/(1+y) > 1-y$ ($y > 0$), то отсюда следует (4).

Оцениваем A_1 . Используя неравенство (4) (при $x = (2s-1)/t$), равенство $1^{-2} + \dots + (2s-1)^{-2} + \dots = \pi^2/8$ и неравенство (3), имеем

$$A_1 = -2t \sum_{s=1}^{2[t]} \frac{1}{(2s-1)^2} \varphi\left(\frac{2s-1}{t}\right) < -2t \sum_{s=1}^{2[t]} \frac{1}{(2s-1)^2} \left(1 - 0,06 \left(\frac{2s-1}{t}\right)^2\right) =$$

$$= -2t \left(\frac{\pi^2}{8} - \sum_{s=2[t]+1}^{\infty} \frac{1}{(2s-1)^2} - 0,06 \frac{2[t]}{t} \right) < -\frac{\pi^2}{4} t + 0,43 + 0,24. \quad (5)$$

Оцениваем A_2 . Поскольку $v \geq t \ln z$, то $\xi^v = \exp(-v/t) \leq \exp(-\ln z) = 1/z$; отсюда и из неравенства $\varphi((2s-1)/t) < 1$ имеем

$$A_2 = 2t \sum_{s=1}^{2[t]} \frac{1}{(2s-1)^2} \xi^{v(2s-1)} \varphi\left(\frac{2s-1}{t}\right) < 2t \sum_{s=1}^{2[t]} \frac{1}{(2s-1)^2} \xi^{v(2s-1)} <$$

$$< 2t \xi^v (1 + \frac{1}{9} \xi^{2v} + \xi^{4v} (\pi^2/8 - 1)) < 2,1 \cdot t/z. \quad (6)$$

В силу неравенств (2), (5), (6) утверждение леммы доказано.

2°. Обозначения. Пусть n_0 — фиксированное целое число, n целое, $n > n_0$, $m = [\pi^{-1} \ln \sqrt{n} + 1]$; $r = [2\sqrt{n} + 1]$.

Положим $\tau = \tau(t) = [\ln(1/A_t)/A_t]$, $mr \leq t \leq n - n_0$;

$$A_t = \begin{cases} \pi(1-1/e)/(2\sqrt{n}), & t=0, 1, \dots, 2r-1, \\ \pi(1-1/e^i)/(2\sqrt{n}), & (1+i)r \leq t < (2+i)r, \quad i=1, \dots, m-2, \\ \pi/(2\sqrt{n-t}), & t=mr, \dots, n-1. \end{cases}$$

Положительные абсолютные константы, вообще говоря разные, будем обозначать одной и той же буквой C .

3°. Л е м м а 2. Справедливы неравенства

$$A_{2r} + \dots + A_t + \pi^2/(2A_{t+1}) > \pi\sqrt{n} - C, \quad mr \leq t < n - n_0; \quad (7)$$

$$(\pi^2/4 - 2, 1/e^{i+1})/A_{(2+i)r} + \pi^2/(4A_{2mr}) > \pi\sqrt{n} + \ln n - C, \quad 1 \leq i \leq m-2; \quad (8)$$

$$A_{t-k} + \dots + A_{t+k} < (2k+1)A_t(1+CA_t), \quad 0 \leq k \leq \tau(t), \quad \tau(t) \leq t \leq n - n_0. \quad (9)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко видеть, что

$$1/2\pi(1/\sqrt{n} + \dots + 1/\sqrt{n-t} + 2\sqrt{n-t-1}) > \pi\sqrt{n} - C, \quad 0 \leq t \leq n-1; \quad (10)$$

$$\sqrt{1-x} > 1 - 1/2x - Cx^2, \quad |x| < 1/2. \quad (11)$$

Докажем неравенство (7). Заменяем величины A_t при $t \geq mr$ их выражениями через n и t , тогда неравенство (7) будет следовать из (10), так как сумма оставшихся величин $A_{2r} + \dots + A_{mr-1} > 1/2\pi(1/\sqrt{n} + \dots + 1/\sqrt{n-mr-1} - C)$ при некотором C . Действительно, из определения следует, что $A_{2r} + \dots + A_{mr-1} = \pi r(m-2 - (1-e^{-m+2})/(e-1))/(2\sqrt{n}) > \pi m - C$, тогда как $1/2\pi(1/\sqrt{n} + \dots + 1/\sqrt{n-mr-1}) < \pi(\sqrt{n} - \sqrt{n-mr}) < \pi m + C$.

Левая часть неравенства (8) равна величине

$$1/2\pi\sqrt{n}(1 + (1-8,4/(\pi^2 e) - 8,4/(\pi^2 e^{i+1}))/e^i) + 1/2\pi\sqrt{n}\sqrt{1-2mr/n} > > 1/2\pi\sqrt{n}(1+C/e^m) + 1/2\pi\sqrt{n} - C \ln n - C > \pi\sqrt{n} + \ln n - C$$

при достаточно больших n .

Следующая цепочка отношений доказывает неравенство (9):

$$A_{t-k} + \dots + A_{t+k} \leq 1/2\pi(1/\sqrt{n-t+k} + \dots + 1/\sqrt{n-t-k}) < \pi(\sqrt{n-t+k+1/2} - \sqrt{n-t-k-1/2}) = 2(2k+1)A_t/(\sqrt{1+(k+1/2)/(n-t)} + \sqrt{1-(k+1/2)/(n-t)}) < < (2k+1)A_t(1+C\tau^2(t)/(n-t)^2) < (2k+1)A_t(1+CA_t).$$

4°. Определим полином $P(x)$ равенством

$$P(x) = \prod_{j=0}^{n-1} (x + \xi_j), \quad \xi_j = \exp\{-(A_0 + \dots + A_j - 2rA_0)\}. \quad (12)$$

5°. Л е м м а 3. Имеем:

$$x|P(-x)|/P(x) < Ce^{-\pi\sqrt{n}} \text{ при } 0 \leq x \leq 1, \quad (13)$$

$$|P(-x)|/P(x) < \pi/4 \text{ при } \xi_{n-1} \leq x \leq 1. \quad (14)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно проверить, что если $0 < a < x < b$, то

$$\frac{b-x}{b+x} \frac{x-a}{x+a} \leq \left(1 - \sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 \left(1 + \sqrt{\frac{a}{b}}\right)^{-2}. \quad (15)$$

Очевидно, когда x совпадает с корнем полинома $P(-x)$, неравенства выполняются. Если же $x \in (\xi_{t+1}, \xi_t)$, то

$$x \left| \frac{P(-x)}{P(x)} \right| = x \prod_{j=0}^t \frac{\xi_j - x}{\xi_j + x} \prod_{j=t+1}^{n-1} \frac{x - \xi_j}{x + \xi_j}. \quad (16)$$

Отсюда и из неравенства (15)

$$\left| \frac{P(-x)}{P(x)} \right| < \frac{\xi_t - x}{\xi_t + x} \frac{x - \xi_{t+1}}{x + \xi_{t+1}} \leq \frac{1 - \exp(-1/2A_{t+1})}{1 + \exp(-1/2A_{t+1})} < 1/2A_{t+1} \leq \frac{\pi}{4}.$$

Доказываем неравенство (13). Сначала рассмотрим случай $(1+i)r \leq$

$\leq t < (2+i)r, i=1, 2, \dots, m-2$. Из (16) следует неравенство

$$x \left| \frac{P(-x)}{P(x)} \right| < \prod_{j=0}^t \frac{\xi_j - \xi_{t+1}}{\xi_j + \xi_{t+1}} \prod_{j=t+1}^{2mr} \frac{\xi_t - \xi_j}{\xi_t + \xi_j}.$$

Разделим на ξ_j числители и знаменатели в первой группе сомножителей. Учитывая, что последовательность A_t неубывающая, получим

$$\xi_{t+1}/\xi_j = \exp \{-(A_{j+1} + \dots + A_{t+1})\} \geq \exp \{-(t+1-j)A_{t+1}\} = \exp \{-kA_{t+1}\} > \exp \{-(k+1/2)A_{(2+i)r}\},$$

где величина k изменяется от 1 до t , в то время когда величина j изменяется от t до 1.

Во второй группе проведем аналогичные преобразования и получим оценку

$$x \left| \frac{P(-x)}{P(x)} \right| < C_n \prod_{h=0}^t \frac{1 - \exp \{-(k+1/2)A_{(2+i)r}\}}{1 + \exp \{-(k+1/2)A_{(2+i)r}\}} \prod_{h=0}^{2mr-t-1} \frac{1 - \exp \{-(k+1/2)A_{2mr}\}}{1 + \exp \{-(k+1/2)A_{2mr}\}}.$$

Одновременно правую часть умножили на величину, большую единицы. В рассматриваемом случае $t \geq (1+i)r > (\ln e^{1+i})/A_{(2+i)r}$, $2mr-t-1 \geq mr > \ln(1/A_{2mr})/A_{2mr}$. Для завершения доказательства остается применить лемму 1 и неравенство (8).

В случае $mr \leq t \leq n-n_0$, полагая $a = \xi_{t+1+h}$, $b = \xi_{t-h}$, из равенства (16) и неравенства (15) получим

$$x \left| \frac{P(-x)}{P(x)} \right| < x \prod_{j=t-\tau}^t \frac{\xi_j - x}{\xi_j + x} \prod_{j=t+1}^{t+1} \frac{x - \xi_j}{x + \xi_j} < x \prod_{h=0}^{\tau} \left(1 - \sqrt{\frac{\xi_{t+1+h}}{\xi_{t-h}}} \right)^2 \left(1 + \sqrt{\frac{\xi_{t+1+h}}{\xi_{t-h}}} \right)^{-2}$$

Если здесь выражение под знаком радикала уменьшится, то все произведение только увеличится. Из неравенства (9)

$\xi_{t+1+h}/\xi_{t-h} = \exp \{-(A_{t-h+1} + \dots + A_{t+1+h})\} > \exp \{-(2k+1)A_{t+1}(1+CA_{t+1})\}$. Замена в последнем выражении x большей величиной $\xi_t = \exp \{-(A_{2r} + \dots + A_t)\}$, отношение ξ_{t+1+h}/ξ_{t-h} — полученной оценкой, а потом, применяя лемму 1 и неравенство (7), докажем (13).

Наконец, рассмотрим случай $x \in [0, \xi_{n-n_0}]$. Из неравенства (7) получаем

$$x |P(-x)|/P(x) < x \leq \xi_{n-n_0} < C \exp(-\pi\sqrt{n}), \quad (17)$$

чем заканчивается доказательство леммы 3.

6°. Возьмем, подобно Д. Ньюману ⁽²⁾, рациональную функцию $r(x)$, приближающую $|x|$, в виде $x(P(x)-P(-x))/(P(x)+P(-x))$, где $P(x)$ — полином степени n , определяемый равенством (12).

$P(-x) \geq 0$ для $x \in [0, \xi_{n-1}]$, поэтому (см. (17))

$$|x - r(x)| = x - r(x) \leq x \leq \xi_{n-1} < C \exp(-\pi\sqrt{n}).$$

Для $x \in [\xi_{n-1}, 1]$ имеем (см. (13) и (14))

$$|x - r(x)| = 2 \left| x \frac{P(-x)}{P(x)} \right| \left| \frac{P(-x)}{P(x)} + 1 \right|^{-1} < 2Ce^{-\pi\sqrt{n}} \cdot 5.$$

Так как $r(x)$ при четных n имеет степень n , а при нечетных — степень $n+1$, то в любом случае при больших n будет

$$R_n(|x|, [-1, 1]) < C \exp(-\pi\sqrt{n-1}) < C_1 \exp(-\pi\sqrt{n}).$$

Заменяв, если необходимо, постоянную C_1 большей постоянной, убеждаемся в справедливости теоремы при всех n .

Следствие. $R_n(\sqrt{x}, [0, 1]) = R_{2n}(|x|, [-1, 1]) \times \exp(-\pi\sqrt{2n})$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
29 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ H. Lebesgue, Bull. Sc. Math., v. 22 (1898). ² D. J. Newman, Michigan Math. J., v. 11, № 1 (1964). ³ А. А. Гончар, Матем. сб., т. 72 (114), 489 (1967). ⁴ А. П. Буланов, Матем. сб., т. 76 (118), 288 (1968). ⁵ Н. С. Вячеславов, Матем. заметки, т. 16, № 1 (1974). ⁶ А. П. Буланов, Изв. АН СССР, сер. матем., № 5, 1132 (1969).