Доклады Академии наук СССР
1975. Том 221, № 6

УДК 517.948.5:532.516.5

МАТЕМАТИКА

О. Г. СМОЛЯНОВ

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 23 X 1974)

После работы Хопфа ([1]) по статистической гидромеханике постепенно стало обычным ([2-4]) заменять исследование нелинейных эволюционных дифференциальных уравнений исследованием линейных уравнений для их «первых интегралов». Однако, по-видимому, никаких общих теорем о связи между разрешимостью соответствующих нелинейной и линейной задач Коши до сих пор установлено не было. Получение такого рода теорем и является основной целью настоящей работы. Направляющей идеей при этом служит то, что связь между нелинейным эволюционным уравнением и уравнением для его «первых интегралов» аналогична связи (исследованной в ([5]) и ([6])) между двумя линейными эволюционными уравнениями, в правых частях которых стоят сопряженные линейные операторы.

Сопоставление одного из формулируемых ниже предложений с результатами работы ([3]) позволяет получить описание некоторого класса единственности решения задачи Коши для системы уравнений Навье — Стокса при периодических граничных условиях.

Всюду ниже N — множество всех натуральных чисел, X_1, X_2, X — локально выпуклые пространства (л.в.п.) над полем вещественных чисел, $\mathscr{L}(X_1, X_2)$ — линейное пространство всех линейных секвенциально непрерывных (с.н.) отображений из X_1 в X_2, наделенное топологией сходимости на множестве всех сходящихся последовательностей из X_1. Отображение f: $X_1\to X_2$ будем называть дифференцируемым в точке $x\in X_1$, если существует такое $l\in\mathscr{L}(X_1, X_2)$, что, каковы бы ни были сходящаяся к нулю последовательность отличных от нуля вещественных чисел $\{t_n\}$ и сходящаяся последовательность $\{h_n\}$ элементов из X_1,

$$t_n^{-1}(f(x+t_nh_n)-f(x))-lh_n\to 0 \text{ в } X_2 \text{ при } n\to\infty.$$

Отображение f: $X_1\to X_2$ будем называть $n+1$ раз, $n\in N$, дифференцируемым в точке $x\in X_1$, если оно n раз дифференцируемо в некоторой окрестности U этой точки и если его n-я производная $f^{(n)}$: $U\to\mathscr{L}_n(X_1, X_2)\equiv\equiv\mathscr{L}(X_1,\ldots,\mathscr{L}(X_1, X_2)\ldots)$ дифференцируема в точке x. При этом мы полагаем $f^{(n+1)}(x)=(f^{(n)})'(x)$. Отображение f: $X_1\to X_2$ будем называть бесконечно дифференцируемым в точке $x\in X_1$, если, каково бы ни было $n\in N$, оно n раз дифференцируемо в этой точке *. Через $C(X_1, X_2)$ будем обозначать линейное пространство всех бесконечно дифференцируемых в каждой точке отображений из X_1 в X_2, наделенное топологией, определяемой так: если $\{f_\alpha\}$ — обобщенная последовательность элементов из $C(X_1, X_2)$, то $f_\alpha\to f$ в том и только в том случае, если, каковы бы ни были $n\in N$ и сходящаяся последовательность $\{x_k\}$ элементов из X, $f_\alpha^{(n)}(x)\to f^{(n)}(x)$ в $\mathscr{L}_n(X_1, X_2)$ равномерно по $x\in K$, где K — множество элементов последовательности $\{x_k\}$.

---

* Для того чтобы всякое дифференцируемое в точке $x\in X_1$ отображение f: $X_1\to X_2$ было с.н. в этой точке, необходимо и достаточно, чтобы X_1 удовлетворяло следующему условию: для всякой сходящейся к нулю последовательности $\{x_n\}$ элементов из X_1 найдется такая последовательность $\{\lambda_n\}$ вещественных чисел, что $\lambda_n\to\infty$, но $\lambda_nx_n\to 0$; в п. 2 настоящей заметки предполагается, что пространство X удовлетворяет этому условию.

Пространство $C(X, R^1)$ будем обозначать через Z. Если $A \in C(X, X)$, то через A^0 (соответственно через $A^{\#}$) будем обозначать отображение $C(X, \mathscr{L}(X, R^1))$ (соответственно Z) в Z, определяемое так: $(A^0\psi)(x) = \psi(x) \cdot A(x)$ (соответственно $(A^{\#}\varphi)(x) = \varphi(A(x))$); при этом включение $A^{\#}\varphi \in Z$ вытекает из цепного правила, а включение $A^0\psi \in Z$ — из цепного правила и бесконечной дифференцируемости отображения вычисления $X \times \mathscr{L}(X, R^1) \to R^1$, $(x, l) \mapsto l(x)$. Кроме того, из секвенциальной непрерывности отображения $C(X, X) \times C(X, X_1) \to C(X, X_1)$ взятия композиции ([8]) следует, что A^0 и $A^{\#}$ с.н.

Через Y будем обозначать линейное пространство всех с.н. линейных функционалов на X, наделенное (линейной) топологией, удовлетворяющей следующему условию (А): если $\{y_n\}$ и $\{x_n\}$ — сходящиеся последовательности элементов соответственно из Y и из X, то числовая последовательность $y_n(x_n)$ также сходится. Для каждого $l \in \mathscr{L}(X, X)$ символом l^* будем обозначать сопряженное к l отображение Y в Y.

Если $a, b \in R^1$, то

$$[a, b] = \{t \in R^1, \min(a, b) \leqslant t \leqslant \max(a, b)\}, \quad (a, b] = [a, b] \setminus \{a\} \text{ и т. д.};$$

$$U_{ab} = \{(t_1, t_2) \in [a, b] \times [a, b],\ [a, t_1) \cap (t_2, b] = \varnothing\}.$$

Множества $[a, b]$, $(a, b]$ и т. д. будем называть отрезками. Пусть $a, b \in R^1$ и A, B — отображения отрезка $[a, b]$ соответственно в $\mathscr{L}(X, X)$ и $C(X, X)$.

Будут рассмотрены (параллельно, чтобы подчеркнуть отмеченную выше аналогию) связь между уравнениями

$$x'(t) = A(t)x(t) \tag{1}$$

в пространстве X и

$$y'(t) = -A^*(t)y(t) \tag{2}$$

в пространстве Y и связь между уравнениями

$$x'(t) = B(t)x(t) \tag{3}$$

в пространстве X и

$$z'(t) = -B^0(t)Dz(t) \tag{4}$$

в пространстве Z. Здесь для каждого t $z(t)$ — отображение X в R^1 (принадлежащее Z) и $Dz(t)$ — его производная, так что $Dz(t) \in C(X, \mathscr{L}(X, R^1))$.

Определение 1. Решением задачи Коши (з.К) для уравнения (1) на отрезке $[t_0, t_1]$, $t_0, t_1 \in [a, b]$, с начальными данными (н.д.) (t_0, x_0), где $x_0 \in X$, будем называть непрерывную функцию f: $[t_0, t_1] \to X$, удовлетворяющую в каждой точке отрезка (t_0, t_1) уравнению (1) и такую, что $f(t_0) = x_0$.

Аналогичные определения примем и для уравнений (2)—(4).

1. Теорема 1. *Пусть X_0 — некоторое подмножество X, секвенциальное замыкание которого (т. е. наименьшее содержание его секвенциально замкнутое множество) совпадает с X. Если, каковы бы ни были $t_0 \in [a, b]$ и $x_0 \in X$, существует решение з.К. для уравнения (1) (соответственно для уравнения (3)) на отрезке $[a, t_0]$ с н.д. (t_0, x_0), то ни для какого $y \in Y$ (ни для какого $z \in Z$) не может существовать более одного решения з.К. для уравнения (2) (соответственно для уравнения (4)) на отрезке $[a, b]$ с н.д. (a, y) (соответственно с н.д. (a, z)).*

Теорема 2. *Пусть Z_0 — подмножество Z, различающее точки из X. Если, каковы бы ни были $t_0 \in [a, b]$ и $z_0 \in Z$, существует решение з.К. для уравнения (4) на отрезке $[a, t_0]$ с н.д. (t_0, z_0), то ни для какого $x \in X$ не может существовать более одного решения з.К. для уравнения (3) на отрезке $[a, b]$ с н.д. (a, x).*

2. Определение 2. Будем говорить, что з.К. для уравнения (1) (b, a)-корректна, если, каковы бы ни были $t_0 \in [a, b]$ и $x \in X$, сущест-

вует и только одно решение $t \mapsto P_{t_0}{}^t x$ з.К. для уравнения (1) на отрезке $[a, t_0]$ с н.д. (t_0, x), причем $P_{t_0}{}^t \equiv [x \mapsto P_{t_0}{}^t x] \in \mathscr{L}(X, X)$ для всех $(t, t_0) \in U_{a,b}$ и отображение $U_{ab} \to \mathscr{L}(X, X)$, $(t, t_0) \mapsto P_{t_0}{}^t$ с.н.

Совершенно аналогично определяется (b, a)-корректность и для уравнения (2).

Определение 3. Будем говорить, что з.К. для уравнения (3) (соответственно для уравнения (4)) (b, a)-корректна, если, каковы бы ни были $t_0 \in [a, b]$ и $x \in X$ (соответственно $z \in Z$), существует и только одно решение $t \mapsto P_{t_0}{}^t x$ (соответственно $t \mapsto Q_{t_0}{}^t z$) з.К. для уравнения (3) (соответственно (4)) на отрезке $[a, t_0]$ с н.д. (t_0, x) (соответственно (t_0, z)), причем $P_{t_0}{}^t \equiv [x \mapsto P_{t_0}{}^t x] \in C(X, X)$ (соответственно $Q_{t_0}{}^t \equiv [z \mapsto Q_{t_0}{}^t z] \in \mathscr{L}(Z, Z)$) для всех $(t, t_0) \in U_{ab}$ и отображение $U_{ab} \to C(X, X)$, $(t, t_0) \mapsto P_{t_0}{}^t$ (соответственно $U_{ab} \to \mathscr{L}(Z, Z)$, $(t, t_0) \to Q_{t_0}{}^t$ бесконечно дифференцируемо в каждой внутренней точке множества U_{ab} и с.н. на всем U_{ab}.

Теорема 3. *Предположим, что сходимость последовательностей в Y совпадает со сходимостью в $\mathscr{L}(X, R^1)$, а отображение A: $[a, b] \to \mathscr{L}(X, X)$ непрерывно.*

Тогда, если з.К. для уравнения (1) (b, a)-корректна, то з.К. для уравнения (2) (a, b)-корректна; при этом, если $P_t{}^\tau$ $((\tau, t) \in U_{ab})$ — отображения, введенные в определении 2, то для каждого $\tau \in [a, b]$ и каждого $y \in Y$ отображение $t \mapsto (P_t{}^\tau)_y{}^*$, $[\tau, b] \to Y$ является решением з.К. для уравнения (2) на отрезке $[\tau, b]$ с н.д. (τ, y).

Относящееся к уравнениям (1), (2) утверждение теоремы 1 и теорема 3 уточняют и обобщают упомянутые выше результаты ([5]) и ([6]).

Теорема 4. *Предположим, что отображение B непрерывно, а его сужение на (a, b) бесконечно дифференцируемо.*

Тогда, если з.К. для уравнения (3) (b, a)-корректна, то з.К. для уравнения (4) (a, b)-корректна. При этом, если $P_t{}^\tau((\tau, t) \in U_{ab})$ — отображения, введенные в определении 3, то для каждого $z \in Z$ функция ψ: $t \mapsto (P_t{}^\tau)^{*}z$ является решением з.К. для уравнения (4) на отрезке $[\tau, b]$ с н.д. (τ, z).

Теорема 5. *Предположим, что пространство X удовлетворяет следующим условиям:*

(C_1) *в X существует фундаментальная система S абсолютно выпуклых открытых окрестностей нуля такая, что если $s \in S$, то существует функция $\psi_s \in C(X, R^1)$, равная единице на s и нулю вне $2s$;*

(C_2) *всякая последовательность элементов из X, сходящаяся в ослабленной топологии этого пространства, сходится и в его исходной топологии.*

Тогда, если з.К. для уравнения (4) (a, b)-корректна, то з.К. для уравнения (3) (b, a)-корректна.

3. Пусть b, $\nu > 0$, $\lambda > 2$, M — множество всех целых чисел, $P = M \times M \times M$ и для $n = (n_i)$, $m = (m_i) \in P$, $n + m = (n_i + m_i)$, $|n|^2 = n_1{}^2 + n_2{}^2 + n_3{}^2$. Пусть, далее, F — линейное пространство всех отображений P в R^3; рассмотрим ([3]) его подпространство

$$\left\{ \varphi \in F,\ p_\lambda(\varphi) \equiv \sum_{n \in P} (1 + |n|)^\lambda \|\varphi(n)\| < \infty \right\}$$

($\|\cdot\|$ — эвклидова норма в R^3); наделив его нормой p_λ, мы получим банахово пространство, которое будем обозначать через V_λ.

Рассмотрим теперь следующее уравнение относительно неизвестной функции v: $[0, b] \to V_\lambda$:

$$v'(t) = \tilde{B} v(t), \tag{5}$$

где $\tilde{B}$ — отображение V_λ в V_λ, задаваемое равенством

$$\tilde{B}\psi(n) = -\nu n^2 \psi(n) + \sum_{k_1, k_2 \in P} \delta(n - k_1 - k_2) C(k_1 + k_2)(\psi(k_1), \psi(k_2))$$

(функции δ: $P\to R^1$ и C: $P\to[R^3\times R^3\to R^3]$ определены в ([3])). Уравнение (5) — это система Навье — Стокса «в спектральном представлении» ([3, 7]).

Теорема 6. *Каковы бы ни были* $b>0$, $y\in V_\lambda$, *может существовать не более одного решения з.К. для уравнения* (5) *на отрезке* $[0, b]$ *с н.д.* $(0, y)$, *все значения которого принадлежат открытому шару радиуса* $\nu/2\sqrt{2}$ *в пространстве* V_λ (ср. с теоремами единственности в ([9–11])).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
22 X 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *E. Hopf,* J. Rat. Mech. Annal., v. 1, № 1, 87 (1952). [2] *М. И. Вишик, А. В. Фурсиков,* Матем. сб., т. 92 (134), № 3, 347 (1973). [3] *М. И. Вишик, А. В. Фурсиков,* УМН, т. 29, в. 2, 123 (1974). [4] *Ч. Фояш,* Функциональная трактовка теории турбулентности, УМН, т. 29, в. 2, 282 (1974). [5] *И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов,* Пространства основных и обобщенных функций, М., 1958. [6] *Ю. Л. Далецкий, С. В. Фомин,* ДАН, т. 205, № 4, 759 (1972). [7] *А. С. Монин, А. М. Яглом,* Статистическая гидромеханика, «Наука», 1967. [8] *О. Г. Смолянов,* УМН, т. 29, в. 4, 183 (1974). [9] *О. А. Ладыженская,* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, «Наука», 1970. [10] *Ж.-Л. Лионс,* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, «Мир», 1972. [11] *D. G. Ebin, J. Marsden,* Ann. Math., v. 92, № 1, 102 (1970).